Serie estoy-aprendiendo

Matemática Básica 1

Números naturales

Elaborado para estudiantes de
High School Equivalency (HSE) en español
como complemento del website *estoy-aprendiendo*

José M. Fernández, MSc.

Contenido

NÚMEROS NATURALES

1.1 Concepto de número natural

La imagen muestra el Hueso de Ishango.

Saber cuántos animales tenían en su rebaño o el tiempo transcurrido desde un determinado momento fue una necesidad del *Homo sapiens* desde los albores de la humanidad. Para realizarlo se valió de diversas representaciones que a través de la historia se convirtieron en los signos que hoy conocemos como números. Estos números, llamados **números naturales,** son aquellos que permiten contar los elementos de un conjunto. El uno (1), dos (2), cinco (5), veinte (20)…, son números naturales. Ellos están formados por todos los números enteros positivos.

Como prueba arqueológica tenemos el hueso de Ishango, un utensilio de hueso que data del Paleolítico superior, aproximadamente del año 20 000 a. C. Este objeto es un largo hueso (el peroné de un babuino) con un pedazo punzante de cuarzo incrustado en uno de sus extremos, quizás utilizado para grabar o escribir. En un principio se pensaba que se empleaba como palo de conteo, ya que el hueso tiene una serie de muescas talladas divididas en tres columnas que abarcan toda la longitud de la herramienta, pero algunos científicos han sugerido que las agrupaciones de muescas indican un conocimiento matemático que va más allá del conteo.

> Actividades:
> **www.estoy-aprendiendo.com**
> MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS NATURALES
> Ver el video: Historia del número 1

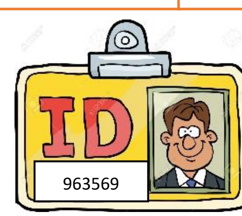
1.2 Propiedades de los números naturales.

El conjunto de los números naturales está formado por:

N= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,...}

Con los números naturales podemos:

1. **Contar** los elementos de un conjunto (**<u>número cardinal</u>**). (*La semana tiene 7 días*)
2. Expresar la posición u **orden** que ocupa un elemento en un conjunto (**<u>número ordinal</u>**). (*En la competencia Juan ocupó el primer lugar, Pedro el segundo y Luis el tercero*)
3. **Identificar** y **diferenciar** los distintos elementos de un conjunto. *(Vicente, en el Harry S Truman College, tiene como número de estudiante el 963569.)*



4. Los números naturales están ordenados, lo que nos permite **comparar** dos números naturales entre sí:

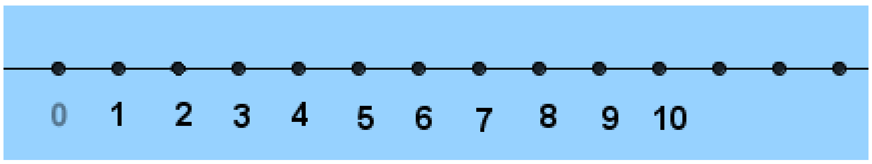
Comparación	Representación
5 es mayor que 3	5 > 3
3 es menor que 5	3 < 5

El signo **>** se lee MAYOR QUE, el signo **<** se lee MENOR QUE.

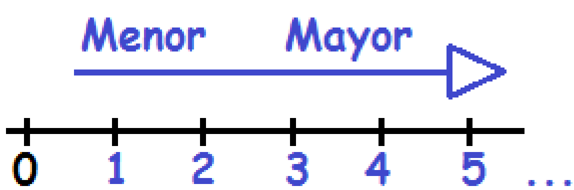
5. Los números naturales son **ilimitados**, si a un número natural le sumamos 1, obtenemos otro número natural, es decir, **los números naturales son infinitos** (∞[1])

1.3 Representación de los números naturales. Orden de los números.

Los números naturales se pueden representar en una recta ordenados de menor a mayor.
Sobre una recta señalamos un punto, que marcamos con el número cero[2] (0).
A la derecha del cero, y con las mismas separaciones, situamos de menor a mayor los siguientes números naturales: 1, 2, 3...



Observe que el número que está a la derecha de un número siempre es mayor que este.
Los números naturales aumentan hacia la derecha.



[1] ∞ es el símbolo matemático que representa el infinito.
[2] El cero (0) es el signo numérico de **valor nulo**, que en notación posicional (*ver acápite 1.4 a continuación*) ocupa los lugares donde no hay una cifra significativa. Si está situado a la derecha de un número entero, su valor se multiplica por 10; colocado a la izquierda, no lo modifica. La **civilización india** es la cuna de la notación posicional, de uso casi universal en el siglo XXI. La palabra «cero» proviene de la traducción de su nombre en sánscrito *shunya* (vacío) al árabe *sifr*, a través del italiano. La voz española «cifra» también tiene su origen en *sifr*.

1.4 Valor posicional de un número natural.

La posición que ocupa cada dígito[3] en un número indica su valor.
Los números naturales forman parte del sistema de numeración decimal, por lo que se ordenan en periodos, clases y órdenes; cada periodo tiene dos clases, y cada clase tiene tres órdenes, como se establece en la siguiente tabla:

Periodo de los millones						Periodo de las unidades					
Clase de los millares de millón			**Clase de los millones**			**Clase de los millares (mil)**			**Clase de las unidades**		
C	**D**	**U**	**C**	**D**	**U**	**C**	**D**	**U**	**C**	**D**	**U**

Las órdenes son:

- **Unidades** representada por la U
- **Decenas** representada por la D
- **Centenas** representada por la C

El periodo de gestación de un ser humano medido en segundos es de veintitrés millones, quinientos ochenta y siete mil segundos. Si ordenamos esta cantidad en una tabla como la anterior, el resultado sería de 23 millones, 587 millares y 200 unidades. Esto es:

millares de millón			**millones**			**millares**			**unidades**		
C	**D**	**U**	**C**	**D**	**U**	**C**	**D**	**U**	**C**	**D**	**U**
				2	**3**	**5**	**8**	**7**	**2**	**0**	**0**

1.5 Descomposición polinómica de un número natural.

Si consideramos cada dígito, la cifra se descompone así:
20 000 000
3 000 000
500 000
80 000
7 000
200
23 587 200

Podemos expresar esta cantidad en notación desarrollada, la cual se inicia de izquierda a derecha				
2 decenas de millón	=	2 x 10 000 000	=	20 000 000
3 unidades de millón		3 x 1 000 000		3 000 000
5 centenas de millar		5 x 100 000		500 000
8 decenas de millar		8 x 10 000		80 000
7 unidades de millar		7 x 1 000		7 000
2 centenas		2 x 100		200
0 decenas		0 x 00		00
0 unidades		0 x 0		0

Observe que la **posición** del 3 es el de las unidades de millón y su **valor** es 3 000 000. Es decir, la **posición** se refiere al lugar posicional que ocupa dicho dígito y el **valor** al resultado de multiplicar dicho dígito por el valor de dicha posición.

[3] El término dígito deriva de *digitus*, vocablo latino que puede traducirse como "dedo". En el terreno de las matemáticas, se llama dígito al número que se expresa a través de un solo guarismo (los guarismos son las cifras o signos que sirven para expresar una cantidad). Esto quiere decir que, en la numeración decimal, los números dígitos son diez: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Actividades a realizar:
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS NATURALES
Ver los videos: Leer y escribir números, Valor Posicional, Lectura y escritura de números naturales.
Hacer los ejercicios: Valor Posicional Interactivo ThatQuiz

1.6 Suma de números naturales

a + b = c

En una suma (a + b = c), **a** y **b** se denominan **sumandos** y **c** (el resultado) se denomina **suma**.

$$sumando + sumando = \; suma$$

Propiedades de la suma de números naturales

1. Es una operación interna
   El resultado de sumar dos números naturales es otro número natural.
   $a + b \in N$
2. Asociativa
   El modo de agrupar los sumandos no varía el resultado.
   (a + b) + c = a + (b + c)
   Ejemplo:
   (2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)
   5 + 5 = 2 + 8
   10 = 10
3. Conmutativa
   El orden de los sumandos no varía la suma.
   a + b = b + a
   Ejemplo:
   2 + 5 = 5 + 2
   7 = 7
4. Elemento neutro
   El 0 es el elemento neutro de la suma, porque todo número sumado con él da él mismo número.
   a + 0 = 0 + a
   Ejemplo:
   a + 0 = a
   3 + 0 = 3

Actividades:
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS NATURALES
Ver el video: Suma y resta de números naturales
Ejercicio de Suma Interactivo ThatQuiz

1.7 Resta de números naturales

a – b = c

En una resta (a - b = c), **a** se denomina **minuendo**, **b** se denomina **sustraendo** y **c** (el resultado) se denomina **diferencia.**

$$minuendo - sustraendo = \ diferencia$$

Propiedades de la resta de números naturales

1 No es una operación interna

El resultado de restar dos números naturales **NO SIEMPRE** es otro número natural.

$$2 - 5 \notin \mathbb{N}$$

2 No es conmutativa

El orden del minuendo y sustraendo varía la diferencia.

5 – 2 ≠ 2 - 5

> Actividades:
> **www.estoy-aprendiendo.com**
> MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS NATURALES
> Ver el video: Suma y resta de números naturales
> Ejercicio de Resta Interactivo ThatQuiz

1.8 Multiplicación de números naturales

a · b = c

Multiplicar dos números naturales consiste en sumar uno de los factores consigo mismo tantas veces como indica el otro factor.

En una multiplicación (a x b = c), **a** y **b** se denominan **factores** y **c** (el resultado) se denomina **producto**.

Propiedades de la multiplicación de números naturales

1. Es una operación interna
   El resultado de multiplicar dos números naturales es otro número natural.
   $$a \times b \ \in N$$

2. Es asociativa
   El modo de agrupar los factores no varía el resultado.
   (a · b) · c = a · (b · c)

   Ejemplo:

   (2 · 3) · 5 = 2 · (3 · 5)
   6 · 5 = 2 · 15
   30 = 30

3. Es conmutativa
   El orden de los factores no varía el producto.
   $$a \cdot b = b \cdot a$$
   Ejemplo:
   $$2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$$
   $$10 = 10$$
4. Tiene elemento neutro
   El 1 es el elemento neutro de la multiplicación de números naturales porque todo número multiplicado por él da el mismo número.
   $$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$
   Ejemplo:
   $$3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = 3$$
5. Distributiva
   La multiplicación de un número natural por una suma es igual a la suma de las multiplicaciones de dicho número natural por cada uno de los sumandos.
   $$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
   Ejemplo:
   $$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$$
   $$2 \cdot 8 = 6 + 10$$
   $$16 = 16$$
6. Se puede extraer factor común
   Es el proceso inverso a la propiedad distributiva. Si varios sumandos tienen un factor común, podemos **transformar la suma en producto** extrayendo dicho factor.
   $$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$
   Ejemplo:
   $$2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 2 \cdot (3 + 5)$$
   $$6 + 10 = 2 \cdot 8$$
   $$16 = 16$$

Actividades:
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS NATURALES
Ver el video: Multiplicación de números naturales
Ejercicio de Multiplicación Interactivo ThatQuiz

1.9 División de números naturales

$$D \div d = c$$

En una división ($D \div d = c$), **D** se denominan **dividendo, d** se denomina **divisor** y **c** (el resultado) se denomina **cociente**.

Tipos de divisiones

1. División exacta

   Una división es exacta cuando el resto o residuo es cero.
   $$D = d \times c$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline 5 & 15 \\ & \boxed{0} \end{array} \qquad 3 \times 5 = 15$$

2. <u>División entera</u>

   Una división es entera cuando el resto o residuo es distinto de cero.

   D = d · c + r

   Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline 5 & 17 \\ & \boxed{2} \end{array} \qquad 3 \times 5 + 2 = 17$$

Propiedades de la división de números naturales

1. <u>No es una operación interna</u>
   El resultado de dividir dos números naturales no siempre es otro número natural.

$$a \div b \ \notin N$$

Ejemplo:

2: 6

2. <u>No es conmutativa</u>
   El modo de agrupar los factores varía el resultado.

$$a \div b \ \neq b \ \div a$$

   Ejemplo:

$$6 \div 2 \ \neq 2 \ \div 6$$

3. <u>El cero dividido **entre cualquier número** da cero</u>

$$0 \div a = 0$$

Ejemplo:

$$0 \div 6 = 0$$

4. La división por 0 no está definida. **No se puede dividir por 0**

$$a \div 0 \quad NO\ DEFINIDO$$

Actividades:
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS NATURALES
Ver el video: División de números naturales
Ejercicio de División Interactivo ThatQuiz

1.10 números primos

Definición

Un número primo es un número natural mayor que el 1 y que **tiene exactamente dos divisores**. Es decir, un número primo sólo tiene como divisor a él mismo y a la unidad. El número 1 sólo tiene un divisor, por eso no se considera un número primo

Para averiguar si un número es primo, se divide ordenadamente por todos los números primos menores que él.

En la tabla puede observar que el 2, 3, 5, 7, 11 y 13 (marcados con la **P** de primo) solamente tienen dos divisores: el propio número y el 1.

	P	P		P		P				P		P
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	1	1	2	1	3	1	4	3	5	1	6	1
			1		2		2	1	2		3	
					1		1		1		2	
											1	

Listado de los números primos hasta 200

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199

Números compuestos

Un número ***compuesto*** es el que posee más de dos divisores. Es decir, aquel que se puede dividir por sí mismo, por la unidad y por otros números. En la tabla de arriba observen que el 4, 6, 8, 9, 10 y 12 tienen más de dos divisores.

Los números compuestos se pueden expresar como productos de números primos. A dicha expresión se le llama descomposición de un número en factores primos.
Ejemplo:
4=2x2 *(también puede expresarse 2^2, es decir el dos se multiplica por sí mismo 2 veces)*
6=2x3
8=2x2x2 *(también puede expresarse 2^3, es decir el dos se multiplica por sí mismo 3 veces)*
9=3x3 *(también puede expresarse 3^2, es decir el dos se multiplica por sí mismo 3 veces)*
10=2x5
12=2x2x3 *(también puede expresarse 2^2x3, es decir el dos por sí mismo 2 veces por el 3)*
…
70=2x5x7

Los números se dividen en pares e impares (también llamados nones).

Números pares

Cualquier número que se pueda dividir exactamente entre 2. La última cifra de número par será 0, 2, 4, 6 u 8
Ejemplo:
2, 16, 250, 366, 44,…

Números impares

Cualquier número que no es par. La última cifra será 1, 3, 5, 7 o 9.
Ejemplo:
1, 11, 25, 47, 99, 133, 849,…

ANALIZA LO SIGUIENTE
Todos los números pares son compuestos EXCEPTO el 2
Todos los números que terminan en 0 o en 5 son compuestos EXCEPTO el 5

Actividades:
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS NATURALES
Ver el video: Números Primos
Ejercicio de Primos y compuestos ThatQuiz

1.11 Factorización de números compuestos

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Existen algunos números naturales que tienen ciertas características particulares. A muchos de ellos es posible identificarlos como múltiplos de otros números iguales o más pequeños. De aquí que sea sencillo diferenciar a los que son divisibles entre los números más usuales, y con ello determinar los criterios de divisibilidad.

A los múltiplos de 2 (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24...) reciben el nombre de números pares.

Con los múltiplos de 3 (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33...) se observa que al sumar las cifras que componen a cada número se obtendrá 3 o un múltiplo de 3. Si además la suma se reduce a una sola cifra, sumando nuevamente se obtendrá sólo alguno de los números 3, 6 o 9.

Criterio de divisibilidad por 2

Un número natural es divisible entre 2 si su última cifra es 0, 2, 4, 6 u 8, dicho de otro modo, su terminación es cero o par.

Ejemplos:

500 es divisible entre 2 por terminar en 0.
844 es divisible entre 2 por terminar en número par.
977 **NO ES** divisible entre 2 por terminar en cifra impar.

Criterio de divisibilidad por 3

Un número natural es divisible entre 3 si la suma de sus cifras (dígitos) es divisible entre 3.

Ejemplos:

En el número 4 452 sus cifras suman 4 + 4 + 5 + 2 = 15
15 es divisible entre 3, (1+5=6)

En el número 27 225 sus cifras suman 2 + 7 + 2 + 2 + 5 = 18
18 es divisible entre 3, (1+8=9)

En el número 27 226 sus cifras suman 2 + 7 + 2 + 2 + 6 = 19
19 **NO ES** divisible entre 3, (1+9=10)

Criterio de divisibilidad por 5

Un número natural es divisible entre 5 si su última cifra es 0 o 5.

Ejemplos:

40 320 es divisible por 5 porque termina en 0.
1 535 es divisible por 5 porque termina en 5.
72 **NO ES** divisible por 5 porque no termina ni en 0 ni en 5.
593 **NO ES** divisible entre 5 porque no termina ni en 0 ni en 5.

Criterio de divisibilidad por 7

Para determinar si un número es divisible entre 7, se sigue este procedimiento:

Se observa qué número se forma al quitar <u>la última cifra del número</u>.
Después, qué número se obtiene <u>al duplicar la cifra que se quitó</u>.
Se determina cuál es <u>la diferencia entre los dos números así formados</u>; si la diferencia es divisible entre 7, entonces el número original es divisible entre 7.

Ejemplo: **224**	Se separa la última cifra, 4 en este caso)	22 4
	Se obtiene el duplo de la cifra)	4 x 2 = 8

Se obtiene la diferencia entre las cifras obtenidas 22 – 8 = 14
14 es múltiplo de 7.
Por lo tanto, **224** es múltiplo de 7

Ejemplo: **5068** Se separa la última cifra, 4 en este caso) 506 8
Se obtiene el duplo de la cifra) 8 x 2 = 16
Se obtiene la diferencia entre las cifras obtenidas 506 – 16 = 490

Si no está seguro si el número obtenido (490) es divisible por 7, repita el proceso
490 49 0
0 x 2 = 0
49 – 0 = 49
49 es múltiplo de 7.
Por lo tanto, **5068** es múltiplo de 7

Criterio de divisibilidad por 9

Un número es divisible entre 9 si la suma de sus cifras es divisible entre 9.
Ejemplos:
171 es divisible por 9 porque 1 + 7 + 1 = 9
846 es divisible por 9 porque 8 + 4 + 6 = 18, que es múltiplo de 9.
118 **NO ES** divisible entre 9, porque 1 + 1 + 8 = 10 (no cumple el criterio)
837 es divisible por 9 porque la suma de sus cifras: 8 + 3 + 7 = 18, que es divisible entre 9.
45 853 es divisible por 9, porque 4 + 7 + 8 + 5 + 3 = 27, es divisible entre 9.

FACTORIZACIÓN DE NÚMEROS COMPUESTOS
Para factorizar un número o *descomponerlo en factores* efectuamos sucesivas divisiones entre sus divisores primos hasta obtener un 1 como cociente.

Para realizar las divisiones utilizaremos una barra vertical, a la derecha escribimos los divisores primos y a la izquierda los cocientes.

Ejemplo: Factorizar 432

$$\begin{array}{r|l} 432 & 2 \\ 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Solución: $432 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^3$

El 2 multiplicado por sí mismo 4 veces por el 3 multiplicado por sí mismo 3 veces

Factorizar 2520

$$\begin{array}{r|l} 2520 & 2 \\ 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Solución: $2\,520 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

El 2 multiplicado por sí mismo 3 veces por el 3 multiplicado por sí mismo 2 veces, por el 5 y por 7

Actividades:
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS NATURALES
Ver el video: Descomponer en factores primos
Ejercicio de Descomponer en factores ThatQuiz

1.12 Múltiplos de un número

Un número **a** es múltiplo de otro **b** cuando es el resultado de multiplicar este último por otro número **c**.

$$a = b \cdot c$$

Dado un número natural obtenemos un múltiplo de él al multiplicarlo por otro número natural.

Ejemplo:

$18 = 2 \cdot 9$ 18 es múltiplo de 2, ya que resulta de multiplicar 2 por 9.

Propiedades de los múltiplos de un número

1. Todo número "a", distinto de 0, es múltiplo de sí mismo y de la unidad.
2. El cero es múltiplo de todos los números.
3. Todo número, distinto de cero, tiene infinitos múltiplos.
4. Si "a" es múltiplo de "b", al dividir "a" entre "b" la división es exacta.
5. La suma de varios múltiplos de un número es otro múltiplo de dicho número.
6. La diferencia de dos múltiplos de un número es otro múltiplo de dicho número.
7. Si un número es múltiplo de otro, y éste lo es de un tercero, el primero es múltiplo del tercero.

8. Si un número es múltiplo de otro, todos los múltiplos del primero lo son también del segundo.

1.13 Divisores de un número

Un número **b** es un ***divisor*** de otro **a** cuando lo divide exactamente.

A los divisores también se les llama ***factore***s.

Ejemplo:

12 : 4 = 3	4 es divisor de 12
4 · 3 = 12	12 es múltiplo de 4

Propiedades de los divisores de un número

1. Todo número "a", **distinto de 0**, es divisor de sí mismo.
2. El 1 es divisor de todos los números.
3. Todo divisor de un número **distinto de cero** es menor o igual a él, por tanto, el número de divisores es finito.
4. Si un número es divisor de otros dos, también lo es de su suma y de su diferencia.
5. Si un número es divisor de otro, también lo es de cualquier múltiplo de éste.
6. Si un número es divisor de otro, y éste lo es de un tercero, el primero lo es del tercero.

Número de divisores de un número

Se obtiene **sumando la unidad a los exponentes** (del número descompuesto en factores) y multiplicando los resultados obtenidos.

Ejemplo:

Consideremos el número 2,520:
Su descomposición en factores es

$$2{,}520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

El número de divisores de 2,520 es:

$(3 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = (4)\,(3)\,(2)\,(2) = 48$

Formación de la tabla de divisores

1. Se escribe una primera fila formada por la unidad y todas las potencias del primer factor y se traza una línea horizontal.
   En este caso el 2

1	2	4	8

2. Se escribe una segunda fila, con los productos del segundo factor por la fila anterior. Si el segundo factor se ha elevado a exponentes superiores a la unidad, por cada unidad del exponente se escribe otra fila. Se traza otra línea horizontal.
   En este caso el 3

1	2	4	8
3	6	12	24
9	18	36	72

3. Se escriben ahora otras filas con los productos del tercer factor (con las potencias correspondientes) por todos los números obtenidos hasta el momento.
   En este caso el 5.

1	2	4	8
3	6	12	24
9	18	36	72
5	10	20	40
15	30	60	120
45	90	180	360

4. Se continúa de igual modo con otros posibles factores.
   En este caso el 7.

1	2	4	8
3	6	12	24
9	18	36	72
5	10	20	40
15	30	60	120
45	90	180	360
7	14	28	56
21	42	84	168
63	126	252	504
35	70	140	280
105	210	420	840
315	630	1260	2520

El último divisor obtenido debe coincidir con el número (2 520)

Propiedad especial

El producto de los extremos, **SIEMPRE** da el número factorizado.

1 x 2520 = 2520
2 x 1260 = 2520
4 x 630 = 2520
9 x 280 = 2520
45 x 56 = 2520

Esto es de suma importancia en la solución de ecuaciones de segundo grado en álgebra para resolver las ecuaciones del tipo $x^2 + px + q = 0$

1.14 Mínimo común múltiplo

El mínimo común múltiplo de varios números (mcm) es el menor de todos los múltiplos comunes, excluido el cero.

Cálculo del mínimo común múltiplo

Método 1

1. Se descomponen los números en factores primos.
2. Se toman los **factores comunes y no comunes** con mayor exponente.

Ejemplos:
Hallar el mcm de 72, 108 y 60:

$72 = \underline{2^3} \cdot 3^2$

$108 = 2^2 \cdot \underline{3^3}$

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot \underline{5}$

Solución: Se toma 2^3 de 72, 3^3 de 108 y 5 de 60

mcm (72, 108, 60) = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 = 1080$

1 080 es el menor múltiplo común a 72, 108 y 60, lo que significa que 1 080 es el menor número que puede ser dividido por 72, 108 y 60.

Método 2

1. Se descomponen los números en factores primos a la vez.
2. Se multiplican todos los factores encontrados.

72	108	60	2	
36	54	30	2	
18	27	15	2	Se repiten los números que no contienen ese factor (en este caso 27 y 15)
9	27	15	3	
3	9	5	3	Se repiten los números que no contienen ese factor (en este caso 5)
1	3	5	3	Se repiten los números que no contienen ese factor (en este caso 5)
	1	1	5	

El resultado es el mismo, pero más rápido: mcm(72, 108, 60) = $2^3 x 3^3 x 5 = 1080$

Propiedades del mínimo común múltiplo

1. Dados varios números todo múltiplo común a ellos es múltiplo del m.c.m de dichos números.
2. Los múltiplos comunes a varios números son también múltiplos del m.c.m de dichos números.
   Ejemplo:
   mcm (16, 8) = 16
   Algunos de los múltiplos comunes de 16 y 8 son, 80. 160, 240, 320 que también son múltiplos de 16
3. Cualquier múltiplo del *mcm* de varios números también lo es de dichos números.
   Ejemplo:
   mcm (16, 8) = 16
   Algunos de los múltiplos de 80 son 160, 240, 320 que también son múltiplos de 16 y de 8

4. El m.c.m. de dos números primos entre sí es su producto.
   Ejemplo:
   mcm (2,5) = 2 · 5 = 10

5. Si un número es un múltiplo de otro, entonces es el mcm de ambos.
   Ejemplo:
   El número 36 es múltiplo de 12.
   mcm (12, 36) = 36

6. Dados varios números, si se multiplican o dividen por otro número entonces su mcm también queda dividido o multiplicado por el mismo número.
   Ejemplo:
   mcm (32, 84) = 672
   32 · 4 = 128
   84 · 4 = 336
   mcm (128, 336) = 2688 = 672 · 4

7. *Relación entre el mcd (máximo común divisor) y mcm (mínimo común múltiplo)*
   mcd (a, b) · mcm (a, b) = a · b
   Ejemplo:
   mcd (12, 16) · mcm (12, 16) = 12 x 16
   mcd (12, 16) = 4
   mcm (12, 16) = 48
   48 · 4 = 12 ·16
   192 = 192

PALABRAS CLAVES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Mínimo, menor, cuando vuelven a coincidir, repiten, encuentran.

Actividades:
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS NATURALES
Ver el video: Mínimo Común Múltiplo
Ejercicio de Mínimo Común Múltiplo ThatQuiz

1.15 Máximo común divisor

El *máximo común divisor* (mcd) de dos o más números **es el mayor número que divide a todos exactamente.**

Cálculo del máximo común divisor

Método 1

1. Se descomponen los números en factores primos.
2. **Se toman los factores comunes con menor exponente**.
3. Se multiplican dichos factores y el resultado obtenido es el mcd.

Ejemplo de cálculo de máximo común divisor

Hallar el MCD de: 72, 108 y 60:

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Solución:

$72 = 2^3 \cdot 3^2$ $\quad 108 = \underline{2^2} \cdot 3^3$ $\quad 60 = 2^2 \cdot \underline{3} \cdot 5$

[El 2 y el 3 se repiten en los tres. Se tomó el menor exponente]

m. c. d. (72, 108, 60) = $2^2 \cdot 3 = 12$

<u>12 es el mayor número que divide a 72, 108 y 60.</u>

Método 2

1. Se descomponen los números en factores primos.
2. **Se toman los factores comunes a los números**.
3. Se multiplican dichos factores y el resultado obtenido es el mcd

72	108	60	**2***	
36	54	30	**2***	
18	27	15	2	Se repiten los números que no contienen ese factor (en este caso 27 y 15)
9	27	15	**3***	
3	9	5	3	Se repiten los números que no contienen ese factor (en este caso 5)
1	3	5	3	Se repiten los números que no contienen ese factor (en este caso 5)
	1	1	5	

Hemos marcado con un asterisco los factores que han sido comunes a los tres números. Al multiplicarlos obtenemos el máximo común divisor:

$$\mathbf{mcd(72,108, 60)= 2^2x3 = 4x3 = 12}$$

Propiedades del máximo común divisor

1. Los divisores comunes de varios números coinciden con los divisores del máximo común divisor.
   Ejemplo:
   Calcular los divisores comunes de 54 y 90.
   mcd (54, 90) = 18
   Los divisores comunes de 54 y 90 son los divisores de 18, por tanto serían 1, 2, 3, 6, 9, 18.

2. Dados varios números, si se multiplican o dividen por otro número entonces su m.c.d también queda multiplicado o dividido por el mismo número.
   Ejemplo:
   mcd (54, 90) = 18
   Si multiplicamos los dos números por 3 queda:
   $54 \cdot 3 = 162$
   $90 \cdot 3 = 270$
   mcd (162, 270) = 54 = $18 \cdot 3$

3. Esta propiedad es consecuencia de la anterior: Dados varios números, si se dividen por su m.c.d los cocientes resultantes son primos entre sí (su m.c.d es 1).
   Ejemplo:
   mcd (54, 90) = 18
   54 : 18 = 3
   90 : 18 = 5
   mcd (3, 5) = 1

4. Si un número es divisor de otro, entonces este es el m. c. d de los dos.
   Ejemplo:
   El número 12 es divisor de 36.
   mcd (12, 36) = 12

PALABRAS CLAVES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Máximo, mayor, dividir, el más grande, objetos iguales, más amplio, más caben, etc.

www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS NATURALES
Ver el video: Máximo Común Divisor
Ejercicio de Máximo Común Divisor ThatQuiz

1.16 Redondeo de números naturales. Reglas

En algunas situaciones, no necesitas el resultado exacto. En estos casos, es posible redondear el número a un valor posicional específico.

Por ejemplo, si compraste un objeto por $56.61, generalmente dices que te costó $56 e incluso $60, pues te resulta más fácil recordar el número sin los centavos. El redondeo se utiliza para realizar cálculos estimados.

Redondear un número quiere decir reducir el número de cifras significativas[4] manteniendo un valor similar. Aunque el resultado es menos exacto, resulta muy fácil de utilizar.

Reglas para redondear números naturales

1. Identifica el dígito con el valor posicional que deseas redondear. (Puedes subrayar o encerrar en un círculo el dígito para destacarlo de los otros)

   Ejemplo 1: Redondear 1,381 a la decena más cercana: 1,381
   Ejemplo 2: Redondear 1,386 a la decena más cercana: 1,381

2. Observa la cifra que está a la derecha del dígito que vas a redondear

   a. Si es 5 o mayor que 5, súmale 1 al dígito.
   b. Si es 4 o menor que 4, dejas el mismo dígito
   Ejemplo 1: 1,381 es 1, al estar en el conjunto {0,1,2,3,4}, dejo el mismo dígito: 8
   Ejemplo 2: 1,386 es 6, al estar en el conjunto {5,6,7,8,9}, sumo 1 al dígito: 8+1=9

3. Sustituye con ceros los valores posicionales a la derecha del dígito que vas a redondear.

   Ejemplo 1: 1,381 → 1,380
   Ejemplo 2: 1,386 → 1,390

www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS NATURALES
Ver el video: Redondeo de números naturales
Ejercicio de Redondeo ThatQuiz
Ejercicios de Redondeo (Documento pdf)

[4] Son significativos todos los dígitos distintos de cero (8723 tiene cuatro cifras significativas); los ceros situados entre dos cifras significativas son significativos (105 tiene tres cifras significativas); los ceros a la izquierda de la primera cifra significativa no lo son. (0,005 tiene una cifra significativa.