<u>Permutaciones y combinaciones</u>

<u>Contamos posibilidades</u>

Comenzamos con un sencillo ejemplo. En España, los coches tienen una matrícula que consta de cuatro dígitos decimales, seguidos de tres letras sacadas de un alfabeto de 26. ¿Cuántas matrículas distintas puede llegar a haber?

Cuando se da una situación en la que cada uno de varios elementos puede tomar valores distintos, o diferentes tareas se pueden hacer de forma distinta, y todos ellos son independientes entre sí, la forma de calcular el número total de posibilidades es multiplicar el número de valores que puede tomar cada elemento, o el número total de formas en las que se puede realizar cada tarea. En nuestro caso, el primer dígito puede tomar uno de 10 valores; para cada uno de estos valores, el segundo dígito puede tomar uno de 10 valores, y así sucesivamente, hasta llegar a la tercera letra, que puede tomar, para cada uno de los casos que tengamos hasta ese momento, uno de 26 valores, para un total de

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 \times 26 = 175.760.000 \text{ posibles matrículas.}$$

Como se puede ver, ¡tenemos matrículas para rato!

Tomemos otro ejemplo sencillo. ¿Cuántos números hay cuya expresión decimal tiene exactamente 6 cifras? (Como es habitual, los ceros a la izquierda se eliminan)

En este caso, uno de los elementos tiene una limitación en su valor: la primera cifra no puede ser cero porque entonces ese cero a la izquierda se eliminaría y el número tendría a lo sumo 5 cifras. Por lo tanto, la primera cifra sólo puede tomar 9 posibles valores (1,2,...,9), para un total de

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 900.000 \text{ números.}$$

Este problema se puede resolver también de otra forma alternativa, ya que el menor número que tiene exactamente 6 cifras es el 100.000, y el mayor es 999.999, y todos los números entre ambos, y ninguno más, tiene exactamente 6 cifras, para un total de

$$999.999 - 100.000 + 1 = 900.000 \text{ números.}$$

Sumamos uno a la diferencia entre 999.999 y 100.000 porque ambos tienen 6 cifras y deben ser contados.

Continuamos con otro ejemplo. En el mus se reparten a cada jugador 4 cartas de una baraja de 40 cartas distintas. ¿De cuántas formas distintas me pueden repartir 4 cartas en el mus? ¿De cuántas formas me pueden tocar los 4 reyes?

Ahora, el resultado de la primera carta que se reparta afecta a las otras 3, porque ninguna de estas 3 puede ser igual a la primera, que ya está repartida. Por lo tanto, aunque la primera carta que me repartan es una de entre 40, la segunda carta deberá ser una de entre las 39 restantes, la tercera una de las 38 restantes, y la cuarta una de entre las 37 restantes, para un total de

$$40 \times 39 \times 38 \times 37 = 2.193.360 \text{ posibles formas de repartir 4 cartas.}$$

Para que me toquen los cuatro reyes, la primera carta debe ser uno de estos cuatro reyes, la segunda uno de los tres restantes, la tercera uno de los dos restantes, y la última el rey que quede, para un total de

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ posibles formas de repartir los 4 reyes.}$$

¡De repente, tener cuatro reyes parece muy difícil!

¿Importa el orden?

Vamos a cambiar ligeramente el problema anterior: ¿Cuántas posibles manos existen en el mus? Es decir, como una vez que tengo mis cuatro cartas en la mano, la jugada no depende del orden en que me hayan llegado, ¿cuántos son los posibles grupos de 4 cartas que puedo llegar a tener jugando al mus? ¿Cuántas manos tienen 4 reyes?

La respuesta a la última pregunta es claramente que sólo 1 mano tiene 4 reyes, ¡cuando tengo los 4! No importa en este caso el orden en que hayan llegado. Me han podido llegar primero el de oros, luego el de copas, el de espadas y finalmente el de bastos (OCEB), pero me han podido llegar también en cualquier otro orden, (CBEO, BOEC,...). De hecho, como el primero ha podido ser cualquiera de los 4, luego cualquiera de los tres restantes, luego cualquiera de los 2 restantes, y finalmente el único que me falta, hay

$$4\times 3\times 2\times 1 = 24 \text{ posibles formas de ordenar los 4 reyes.}$$

¡Claro, tantas formas como hay para que me repartan los 4 reyes si voy recibiendo las cartas de forma ordenada, de una en una! Vemos que el número total de manos con 4 reyes es el resultado de dividir el número de formas de repartir los 4 reyes, entre el número de formas de ordenar estos 4 reyes. En el caso de todas las posibles manos, sucede lo mismo; una vez que tengo 4 cartas en la mano, me han podido llegar en uno de 24 posibles órdenes, pero cada una de estas 24 formas de ordenarlas se corresponden con exactamente una mano, la formada por esas 4 cartas independientemente del orden en que me lleguen. Así, tenemos entonces que hay

$$\frac{40\times 39\times 38\times 37}{4\times 3\times 2\times 1} = 91.390 \text{ posibles manos distintas en el mus.}$$

A este número se le llama “combinaciones de 40 cartas tomadas de 4 en 4”, y es el número posible de grupos de 4 cartas, sin importar el orden, que se pueden tomar de entre 40 distintas.

Formas de ordenar: permutaciones

En este ejemplo sencillo, nos ha bastado con ir contando, pero ¿hay alguna forma general de pensar y calcular que podamos aplicar en ejemplos más complicados? Aunque parezca que estamos “dando más vuelta”, vamos a pensar de otra forma distinta. ¿Cuántas posibles formas hay de ordenar las 40 cartas de la baraja? Siguiendo el mismo razonamiento de antes para ordenar los 4 reyes, vemos que hay

$$40\times 39\times 38\times 37\times 36\times 35\times \ldots\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 \text{ formas de ordenar la baraja.}$$

Si calculamos este producto, es un número de 48 cifras que empieza por 8 Para abreviar, como este número es muy largo, incluso escrito como producto, lo escribimos 40!, y en general, el producto de los números desde 1 hasta n lo escribimos como n!, y le llamaremos n factorial, o factorial de n; así diremos que hay 4!=24 formas de ordenar los 4 reyes, o 10!=3.628.800 formas distintas de ordenar las 10 cartas de oros. Se llaman permutaciones de un conjunto, o permutaciones de los elementos de un conjunto, a las posibles formas de ordenar dichos elementos, y si el conjunto tiene n elementos distintos, el número de permutaciones de estos n elementos es igual a

$$n! = n\times (n-1)\times (n-2)\times \ldots\times 3\times 2\times 1 .$$

Factorial y sus propiedades

El factorial de n, escrito n!, es el producto de los enteros entre 1 y n; así, el factorial de 6 es

$$6! = 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 720 .$$

Definimos 0!=1, principalmente porque como ya hemos visto el factorial de n es igual al número de formas de ordenar n elementos distintos. Si tenemos 0 elementos, hay exactamente una forma de ordenarlos, ¡no tomar ninguno! Además, como veremos otras propiedades funcionan mejor así.

Por ejemplo, es fácil ver que

$$(n+1)! = (n+1)\times n!\,.$$

En efecto, si multiplicamos el producto de los *n* primeros enteros positivos por *n*+1, tenemos claramente el producto de los *n*+1 primeros enteros positivos. Si además hacemos *n*=0, esta propiedad también se cumple cuando definimos, como lo hemos hecho, 0!=1, porque entonces 1!=1×0!=1.
También es sencillo comprobar que

$$\frac{(n+m)!}{n!} = (n+m)\times(n+m-1)\times(n+m-2)\times\ldots\times(n+2)\times(n+1),$$

ya que los números que aparecen en el producto (*n*+*m*)! pero no aparecen en *n*! son exactamente todos los enteros mayores que *n* pero menores o iguales que *n*+*m*. Así, por ejemplo

$$\frac{8!}{3!} = 8\times 7\times 6\times 5\times 4\,.$$

<u>Formas de repartir: combinaciones</u>

¿De qué nos sirve esto a la hora de calcular el número de posibles manos en el mus? Supongamos que ordenamos la baraja en una cualquiera de las 40! formas posibles, y que a mí se me reparten las 4 primeras cartas. Las 36 cartas que no me van a repartir, pueden estar ordenadas en una de las 36! posibles permutaciones de 36 elementos, y las 4 que me reparten pueden estar ordenadas en una de las 4! posibles permutaciones de 4 elementos. Multiplicamos 36! y 4! para obtener el número de permutaciones de las 40 cartas para las que las 4 primeras cartas son las mismas, porque las formas de ordenar las 4 primeras cartas, y las formas de ordenar las 36 últimas, son independientes entre sí. Para cada una de estas 36!4! formas de ordenar independientemente estos dos grupos de cartas, ¡las 4 cartas que recibo son las mismas, las 4 primeras! Puedo entonces calcular también las posibles manos que recibo como

$$\frac{40!}{36!4!} = \frac{40\times 39\times 38\times 37}{4\times 3\times 2\times 1},$$

¡Obtengo el mismo resultado! A esta cantidad se le llama el número de combinaciones de 40 elementos tomados de 4 en 4, y se suele escribir para abreviar como

$$\binom{40}{4}.$$

En general, si hay un conjunto de *n* elementos distintos, y quiero calcular todos los posibles subconjuntos de dicho conjunto que tengan *m* elementos, sin importar el orden de dichos *m* elementos, diré que hay

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$ formas de tomar *m* elementos de entre *n* elementos distintos,

y llamaré a este símbolo y esta cantidad combinaciones de *n* elementos tomados de *m* en *m*, o también se le llama número combinatorio *n* sobre *m*.

Veamos un ejemplo final: la plantilla de Osasuna tiene 3 porteros, 8 defensas, 7 centrocampistas y 4 delanteros. ¿De cuántas posibles formas podemos hacer un equipo con 4 defensas, 4 centrocampistas y 2 delanteros? (suponemos que no diferenciamos entre central o lateral, o entre diestro y zurdo) ¿y si quiero calcular el número de posibles equipos con 4 defensas, y bien 4 centrocampistas y 2 delanteros, o 3 centrocampistas y 3 delanteros?

La respuesta a la primera pregunta es

$$\binom{3}{1}\times\binom{8}{4}\times\binom{7}{4}\times\binom{4}{2} = \frac{3!}{2!1!}\times\frac{8!}{4!4!}\times\frac{7!}{4!3!}\times\frac{4!}{2!2!} = 3\times 70\times 35\times 6 = 44.100$$ posibles equipos.

Como puedo tomar 1 de entre 3 porteros, 4 de entre 8 defensas, etc., y cada una de las elecciones es independiente de las demás, tengo que multiplicar entre sí las formas posibles de elegir jugadores entre cada uno de los grupos, para obtener el número total de posibles equipos.
Si ahora quiero los posibles equipos con 3 centrocampistas y 3 delanteros, entonces tendría

$$\binom{3}{1}\times\binom{8}{4}\times\binom{7}{3}\times\binom{4}{3}=\frac{3!}{2!1!}\times\frac{8!}{4!4!}\times\frac{7!}{3!4!}\times\frac{4!}{3!1!}=3\times 70\times 35\times 4=29.400 \text{ posibles equipos.}$$

Los casos de 4 o 3 centrocampistas, no sólo son independientes, también son disjuntos, es decir, o sucede uno, o sucede otro, pero no los dos a la vez. Por lo tanto, necesito sumar las posibilidades de ambos casos, para un total de equipos con alineaciones 4-4-2 o 4-3-3 igual a

$$\binom{3}{1}\times\binom{8}{4}\times\binom{7}{4}\times\binom{4}{2}+\binom{3}{1}\times\binom{8}{4}\times\binom{7}{3}\times\binom{4}{3}=44.100+29.400=73.500\,.$$

<u>Números combinatorios y sus propiedades</u>

Al número

$$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

se le llama número combinatorio de *n* en *m* o de *n* sobre *m*, o combinaciones de *n* elementos tomados de *m* en *m*, y como ya hemos visto, es igual al número de formas posibles de tomar *m* elementos de un conjunto de *n* elementos distintos. Claramente, *m* no puede ser menor que 0, ni mayor que *n*, pues no puedo elegir un número negativo de elementos, y de entre *n* elementos, no puedo elegir más de *n*. Algunas propiedades interesantes de los números combinatorios son las siguientes (mientras no se diga lo contrario, *n* puede ser cualquier entero no negativo, y *m* cualquier entero no negativo y menor o igual que *n*):

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1\,,$$

porque sólo hay una forma de elegir 0 elementos (no escoger ninguno) o de elegir *n* (escogerlos todos).

$$\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}\,,$$

porque hay las mismas formas de elegir *m* elementos de entre *n*, que elegir *n*–*m*; me basta con ver que, para cada forma de elegir *m*, hay exactamente una forma de elegir *n*–*m* (los *n*–*m* que quedan sin elegir cuando escojo *m*).

$$\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n\,,$$

porque para elegir un elemento de entre *n* distintos, tengo *n* candidatos, y para elegir *n*–1, me basta con escoger uno de entre los *n* candidatos distintos, rechazarlo y quedarme con los *n*–1 restantes.

$$\binom{n}{m}+\binom{n}{m+1}=\binom{n+1}{m+1}.$$

Esta igualdad se puede demostrar operando, ya que haciendo común denominador y sumando,

$$\binom{n}{m}+\binom{n}{m+1}=\frac{n!}{m!(n-m)!}+\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}=\frac{n!(m+1)}{(m+1)!(n-m)!}+\frac{n!(n-m)}{(m+1)!(n-m)!}=$$

$$=\frac{n!(n+1)}{(m+1)!(n-m)!}=\frac{(n+1)!}{(m+1)!((n+1)-(m+1))!}=\binom{n+1}{m+1}.$$

Este resultado tiene sin embargo una interpretación muy clara: veamos cuántos grupos distintos de m+1 elementos se pueden tomar de un conjunto de n+1 elementos; seleccionamos uno de los n+1 elementos, y diremos que es el último. Ahora bien, para elegir m+1 elementos de los n+1, hay dos maneras posibles y disjuntas: o tomamos este último elemento, y elegimos otros m elementos de los n restantes, o no tomamos este último elemento, y elegimos m+1 elementos de los n restantes. Sumando estas dos posibles maneras de generar grupos de m+1 elementos de entre n+1, debemos obtener todos los posibles grupos.

Ejercicios propuestos

¿Cuántos números de exactamente 5 cifras contienen al menos una vez la cifra 3? ¿Cuántos de ellos contienen exactamente una vez la cifra 3?

Tenemos 5 rectas en el plano, de forma que no hay tres de ellas que coincidan en un punto. Si ninguna de las rectas es paralela a ninguna otra, ¿cuántos puntos de intersección entre dos rectas hay? ¿cuántos puntos de intersección hay si exactamente 3 de ellas son paralelas y las otras 2 no lo son, ni entre sí ni con las primeras? ¿cuáles son todos los posibles valores que puede tomar el número de puntos de intersección?

Al póker se juega con una baraja francesa de 52 cartas (4 palos con números ordenados, de menor a mayor, 2,3,4,...,10,J,Q,K,A), repartiéndose 5 cartas a cada jugador. Calcular el número total de manos que puede tener un jugador, y entre ellas el número de formas en las que se pueden obtener las siguientes jugadas:

- Sólo un trío (3 cartas iguales entre sí y las otras 2 distintas entre sí y distintas de las otras 3)
- Full house (3 cartas iguales entre sí y las otras 2 iguales entre sí pero distintas de las primeras)
- Escalera (las 5 cartas con números consecutivos, independientemente del palo)
- Escalera de color (las 5 cartas del mismo palo, y con números consecutivos)
- Sólo color (las 5 cartas del mismo palo, pero no consecutivas)

Calcular la suma de todos los números de 9 cifras en los que aparece exactamente una vez cada una de las cifras 1, 2, 3,..., 9.

Una compañía tiene 5 directores, y una caja fuerte guarda los secretos de la compañía. Se quiere poner el mínimo número de cerraduras que garantice que, dando el mismo número de llaves a cada director, cualquier mayoría (3 o más) de ellos pueda abrir la caja, y ninguna minoría (2 o menos) pueda abrirla. ¿Cuántas cerraduras hay que poner y cuántas llaves recibirá cada directivo?