O Valor do Dinheiro no Tempo Pt. II

Finanças Corporativas II

Instrutor: Rogério Mazali

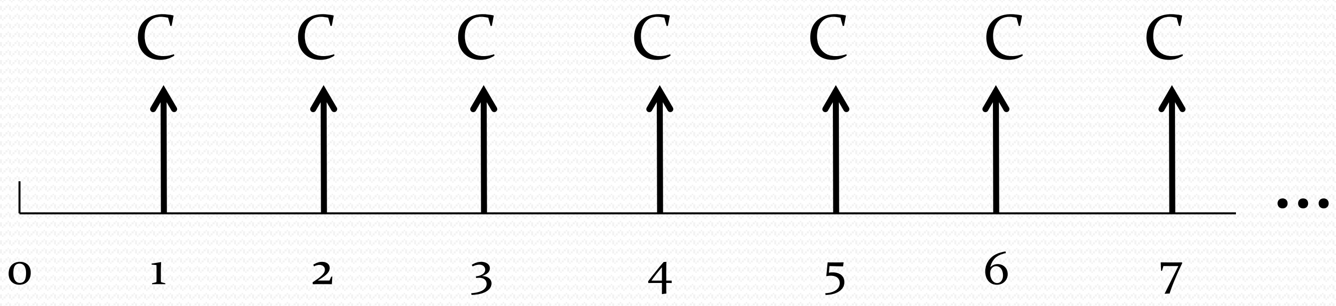
Aula 04

Perpetuidades e Anuidades

- Fluxos de caixa com pagamentos constantes:
  - Financiamentos imobiliários
  - Financiamento de automóveis
  - Títulos da Dívida Pública que pagam cupons
  - Títulos Corporativos que pagam cupons
- Anuidade: qualquer sequência finita de pagamentos periódicos, feitos em intervalos fixos de tempo, e envolvendo montantes constantes
  - Exemplo: financiamento imobiliário de juros fixos
- Perpetuidade: qualquer sequência perpétua de pagamentos periódicos, feitos em intervalos fixos de tempo, e envolvendo montantes constantes
  - Exemplo: Consols (Títulos do Tesouro Britânico que realizam pagamento perpétuo de um valor fixo – o cupom – como pagamento de juros)

Perpetuidades

- Perpetuidades pagam um fluxo de caixa constante $CF_t = C$ **perpétuo**



Perpetuidades

- Como avaliar o VP de uma perpetuidade?

$$VP_0 = FC_0 + \frac{FC_1}{(1+r)} + \frac{FC_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{FC_t}{(1+r)^t} + \ldots$$

$$VP_0 = \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{FC_t}{(1+r)^t}$$

Perpetuidades

$$VP_0 = \frac{C}{(1+r)} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \cdots$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{C}{(1+r)^t} = \frac{\frac{C}{(1+r)}}{1 - \frac{1}{(1+r)}}$$

$$= \frac{\frac{C}{(1+r)}}{\frac{1+r}{(1+r)} - \frac{1}{(1+r)}} = \frac{\frac{C}{(1+r)}}{\frac{r}{(1+r)}} = \frac{C}{r}$$

Perpetuidades

- Fórmula da Perpetuidade:

$$VP_0 = C/r$$

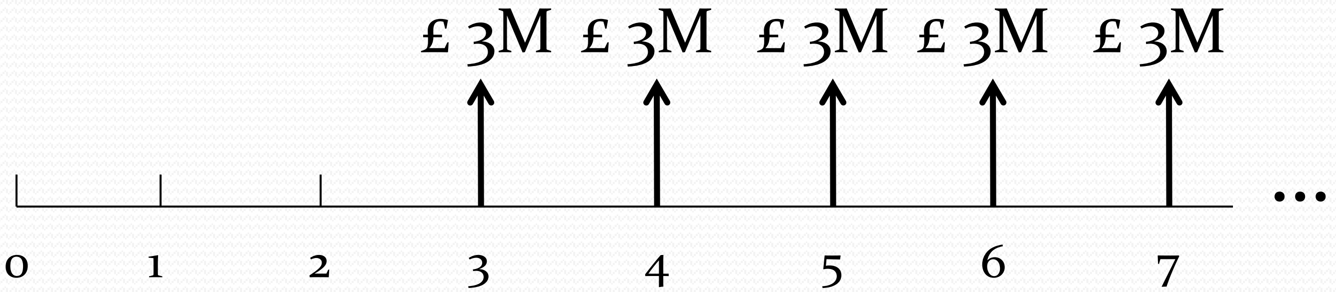
- Exemplo: Consols Britânicos que prometem pagar £100 anualmente como pagamentos de juros (considere r = 10% ao ano):

$$VP_0 = \frac{£100}{0.10} = £1,000$$

Perpetuidades Defasadas

- Você trabalha para uma companhia que possui uma subsidiária no Reino Unido
- Sua empresa recebe uma proposta pela compra da divisão britânica da sua empresa
- Levará 2 anos para finalizar o negócio
- O pagamento não será feito em dinheiro. Sua empresa seria paga em títulos do tesouro britânico que pagarão, no total, £3 milhões em cupons (pagamentos regulares).
- Qual o valor da oferta pela sua empresa?

Perpetuidades Defasadas



Perpetuidades Defasadas

- Sabemos como encontrar o valor dos títulos no momento em que nós o receberemos, daqui a dois anos:

$$VP_2 = \frac{£3M}{0.10} = £30M$$

- Uma vez que sabemos este valor, tudo o que precisamos fazer para saber seu valor hoje é trazê-lo ao valor presente de hoje (t=0):

$$VP_0 = \frac{FV_2}{(1+r)^2} = \frac{£30M}{(1.10)^2} = £24,793,388.43$$

Perpetuidades Crescentes

- Pagamentos anuais que crescem a uma taxa constante g:

$$FC_1 = C$$

$$FC_2 = FC_1 \times (1+g) = C \times (1+g)$$

$$FC_3 = FC_2 \times (1+g) = C \times (1+g)^2$$

$$FC_4 = FC_3 \times (1+g) = C \times (1+g)^3$$

$$\ldots$$

$$FC_t = FC_{t-1} \times (1+g) = C \times (1+g)^{t-1}$$

$$\ldots$$

Perpetuidades Crescentes

$$VP_0 = \frac{FC_1}{(1+r)} + \frac{FC_2}{(1+r)^2} + \frac{FC_3}{(1+r)^3} + \cdots$$

$$= \frac{C}{(1+r)} + \frac{C(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{C(1+g)^2}{(1+r)^3} + \cdot\cdot$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{C(1+g)^{t-1}}{(1+r)^t} = \frac{\frac{C}{(1+r)}}{1 - \frac{1+g}{1+r}}$$

$$= \frac{\frac{C}{(1+r)}}{\frac{1+r}{(1+r)} - \frac{1+g}{(1+r)}} = \frac{\frac{C}{(1+r)}}{\frac{r-g}{(1+r)}} = \frac{C}{r-g}$$

Exemplo

- Qual é o VP de uma perpetuidade crescente se C = \$100, r = 10%, e g = 2%?

$$VP_0 = \frac{C}{r-g} = \frac{\$100}{0.10-0.02} = \$1,250.00$$

Exemplo

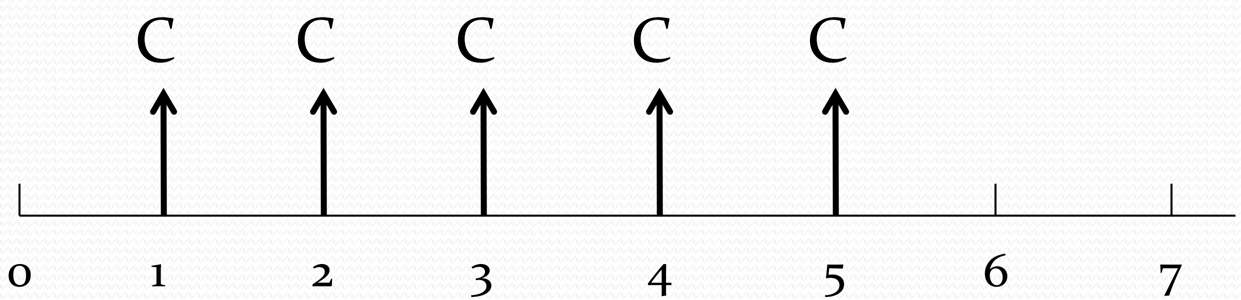
- Um investimento em uma **perpetuidade crescente** custa $5000, e espera-se que ela pague $200 no próximo ano.
- Se a taxa de juros é de 10%, qual é a taxa de crescimento do pagamento anual?
- A: Temos C = $200, r = 10%, e VP = $5,000; g = ?

$$VP_0 = \frac{C}{r-g} = \frac{\$200}{0.10-g} = \$5{,}000.00$$

- Nota: esta fórmula só funciona se g < r

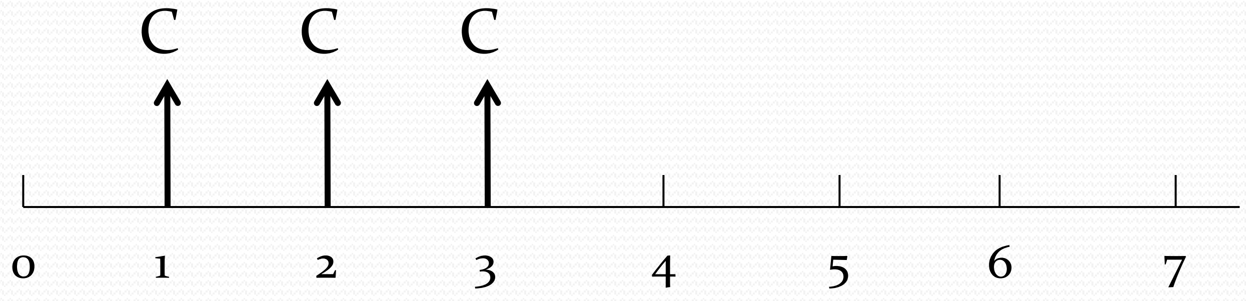
Anuidades

- Uma anuidade é uma série de **pagamentos iguais feitos em intervalos fixos de tempo**
  - Anuidade Ordinária: pagamentos ocorrem no **fim de cada período**
  - Anuidade Vencida: pagamentos ocorrem no **início de cada período**



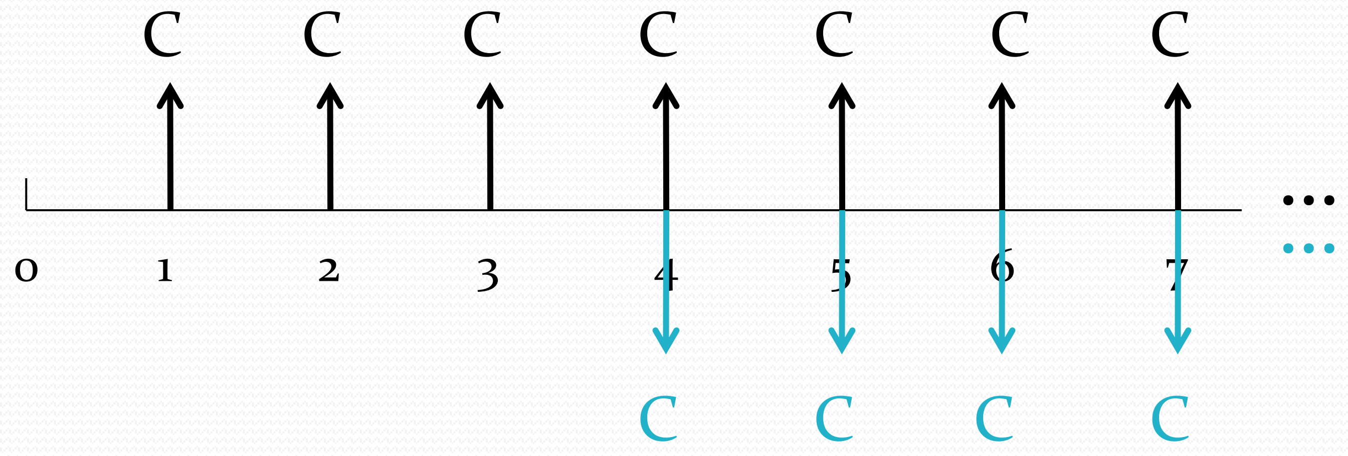
Anuidades Ordinárias

- Como encontrar o VP de uma anuidade?
- Considere, por exemplo, uma anuidade ordinária de 3 anos



Anuidades Ordinárias

- Considere agora a seguinte estratégia:
  1. Comprar hoje uma perpetuidade A pagando C todo período começando em t=1;
  2. Emitir hoje uma perpetuidade B com carência de três períodos, que pagará C todo período começando em t = 4;



Anuidades Ordinárias

	Fluxo de caixa						
Ano	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6 . . .**	**Valor presente**
1. Perpetuidade A	\$1	\$1	\$1	\$1	\$1	\$1 . . .	$\frac{1}{r}$
2. Perpetuidade B				\$1	\$1	\$1 . . .	$\frac{1}{r(1+r)^3}$
3. Anuidade de 3 anos	\$1	\$1	\$1				$\frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^3}$

Anuidades Ordinárias

- VP de uma anuidade ordinária que paga *C* todo ano, por *t* anos:

$$VP = \frac{C}{r} - \frac{C}{r} \times \frac{1}{(1+r)^t}$$

$$= C \times \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^t} \right]$$

$$= C \times [\text{Fator Anuidade de t anos}]$$

Exemplo 1

- Ache o VP de uma anuidade ordinária de 3 anos com pagamentos de $100 à taxa de juros r=10% ao ano.

$$VP_0 = C \times [\text{Fator Anuidade de 3 anos}]$$
$$= \$100 \times \left[\frac{1}{0.10} - \frac{1}{0.10 \times (1.10)^3} \right]$$
$$= \$100 \times 2.4869$$
$$= \$248.69$$

Exemplo 2

- Você concorda em financiar a compra de um carro em 4 anos, em pagamentos de \$300 por mês, pagos sempre no fim do mês. Se a taxa de desconto é de 0.5% ao mês, qual é o custo do financiamento?

$$PV_0 = C \times \left[Fator\ Mensalidade\ de\ 48\ meses \right]$$

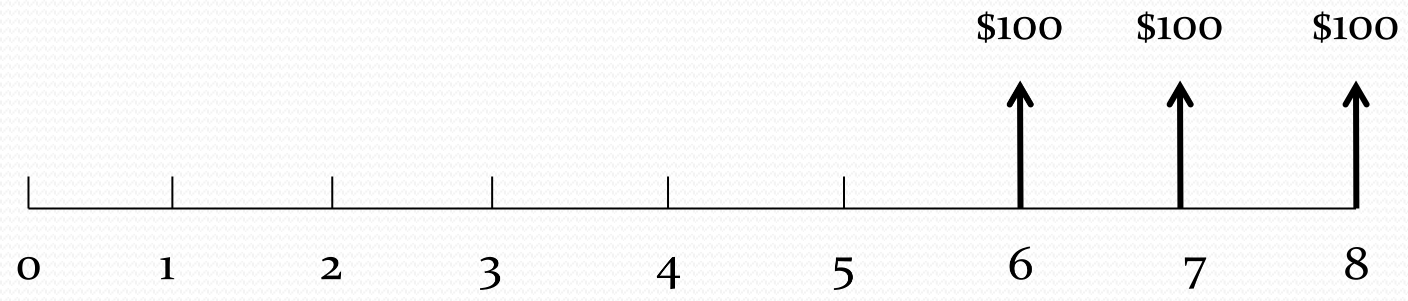
$$= \$300 \times \left[\frac{1}{0.005} - \frac{1}{0.005 \times (1.005)^{48}} \right]$$

$$= \$300 \times 42.58$$

$$= \$12{,}774.10$$

Anuidade Defasada

- O problema: nenhum pagamento é feito nos primeiros 5 anos
- Depois disso, inicia-se o pagamento da anuidade de 3 anos do Exemplo 1



Anuidade Defasada

- **Passo 1: Calcular o VP no tempo 5 usando a seguinte fórmula:**

$$VP_5 = C \times \left[\text{Fator Anuidade de 3 anos}\right]$$
$$= \$100 \times 2.4869$$
$$= \$248.69$$

- **Passo 2: determinar o VP no tempo zero:**

$$VP_0 = \frac{VF_5}{(1+r)^5} = \frac{\$248.69}{(1.10)^5} = \$154.42$$

Exemplo 3

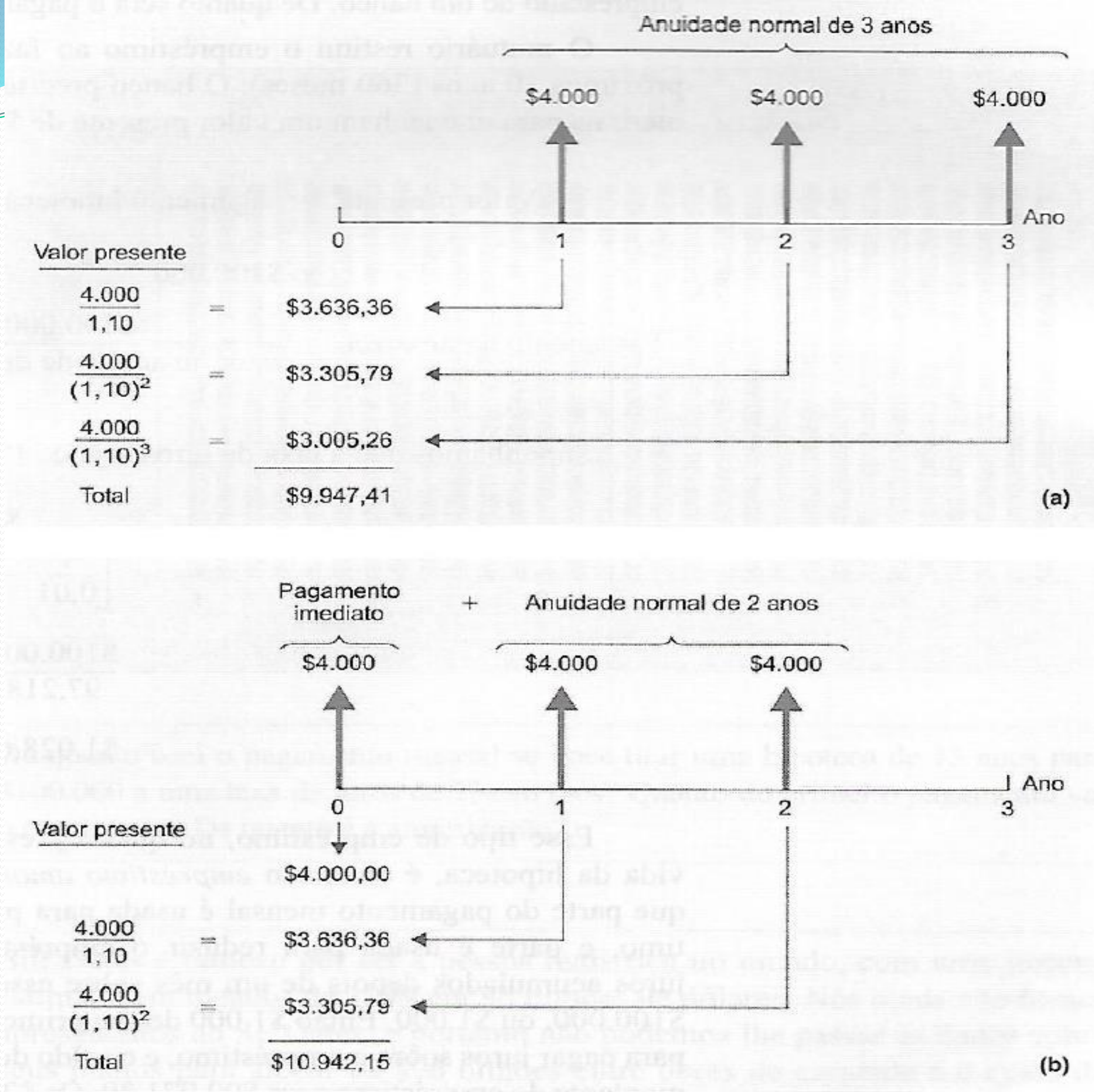
- Qual é o valor hoje de uma anuidade de 10 anos que paga $300 que por ano (no final) se o primeiro fluxo de caixa da anuidade começa no final do ano e a taxa de juros é de 15% nos anos de 1 a 5 e 10% depois disso?

- Etapas:

1. Obter o valor da anuidade em t = 5 (final de ano)
2. trazer valor obtido na etapa 1 para t = 0

Anuidades Vencidas

- Fórmulas de Anuidade e perpetuidade: pagamento no final do período
- O que acontece se os pagamentos são feitos no início do período?
- Muitas vezes, os pagamentos em dinheiro se iniciam imediatamente
- Um fluxo de pagamentos fixos que são devidos a partir de agora (início do período) é conhecido como **Anuidade Vencida**.


Anuidade normal de 3 anos
$4.000
$4.000
$4.000
Ano
0
1
2
3
Valor presente
4.000 / 1,10 = $3.636,36
4.000 / (1,10)² = $3.305,79
4.000 / (1,10)³ = $3.005,26
Total $9.947,41
(a)
Pagamento imediato
+
Anuidade normal de 2 anos
$4.000
$4.000
$4.000
Ano
0
1
2
3
Valor presente
$4.000,00
4.000 / 1,10 = $3.636,36
4.000 / (1,10)² = $3.305,79
Total $10.942,15
(b)

Anuidades Vencidas

- Fórmula de VP de uma Anuidade Vencida:

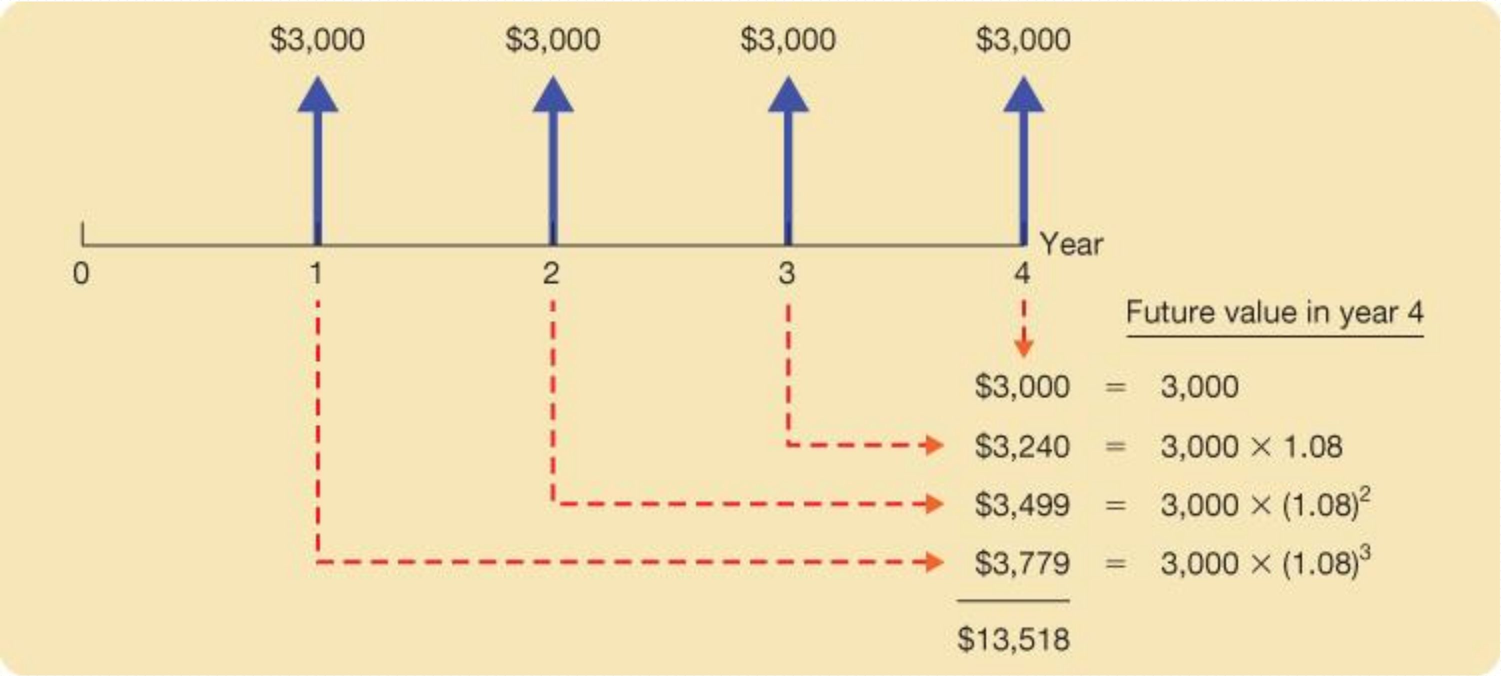
$$VP(An.Venc.) = (1+r) \times VP(An.Ord.)$$

$$= C \times (1+r) \times \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^t} \right]$$

$$= C \times (1+r) \times [\text{Fator Anuidade de t períodos}]$$

Valor Futuro de uma Anuidade

- Exemplo: se você poupar R$ 3.000 por ano, à taxa de juros de 8% ao ano, quanto você teria no final de 4 anos?



Valor Futuro de uma Anuidade

- Com muitos fluxos de caixa, o cálculo pode ser difícil
- No entanto, fluxos de caixa são as mesmas das anuidades.

$$VP = \$3{,}000 \times \left[\text{Fator Anuidade de 4 anos}\right]$$

$$= \$3{,}000 \times \left[\frac{1}{.08} - \frac{1}{.08(1.08)^4}\right]$$

$$= \$9{,}936$$

$$VF = (1.08)^4 \times \$9{,}936$$

$$= \$13{,}518$$

Valor Futuro de uma Anuidade

- Valor futuro de uma anuidade que paga *C* por *t* anos:

$$VF_t = (1+r)^t \times VP_0$$
$$= (1+r)^t \times C \times \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^t} \right]$$

- valor futuro de um Anuidade Vencida que paga *C* por *t* anos:

$$VF\ (An.Venc.) = (1+r) \times VF\ (An.Ord.)$$

Inflação e o Valor do Dinheiro no Tempo

- Inflação corrói o poder de compra do dinheiro
- Até agora nós ter computado VPs e VFs desconsiderando esse problema
- Inflação: Aumento geral dos preços, o efeito de perda de valor do dinheiro

Inflação e o Valor do Dinheiro no Tempo

Ano	IPCA	Ano	IPCA
1994	100,0	2005	249,4
1995	122,4	2006	257,3
1996	134,1	2007	268,7
1997	141,1	2008	284,6
1998	143,5	2009	296,9
1999	156,3	2010	314,4
2000	165,6	2011	334,9
2001	178,3	2012	354,4
2002	200,7	2013	375,4
2003	219,3	2014	399,4
2004	236,0	2015	442,0

Inflação e o Valor do Dinheiro no Tempo

- Medidas de Inflação:
  - FGV:
    - *Índice de Preços ao Consumidor - RJ (IPC-RJ)*
    - *Índice de Preços no Atacado (IPA)*
    - *Índice Nacional de Custos à Construção (INCC)*
    - *Índice Geral de Preços (IGP)*
    - *Índice Geral de Preços ao Mercado(IGP-M)*
    - *Índice Geral de Preços – Disponibilidade Interna (IGP-DI)*
  - IBGE:
    - *Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC)*
    - *Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA)*
  - USP/FIPE
    - *Índice de Preços ao Consumidor – FIPE (IPC-FIPE)*
  - DIEESE:
    - *Índice de Custo de Vida - DIEESE*

Inflação e o Valor do Dinheiro no Tempo

- Valores Reais x Valores Nominais
  - Valores nominais: valores dados em moeda corrente
  - Valores reais: valor dado pelo poder de compra; dado pelo valor em moeda de um período de referência
- Exemplo: taxa de juros de 6% e a taxa de inflação de 6% => você não ganha NADA!

$$1 + \text{Taxa de Juros Real} = \frac{1 + \text{Taxa de Juros Nominal}}{1 + \text{Taxa de Inflação}}$$

- Aproximação comumente usada:

$$\text{Taxa de Juros Real} = \text{Taxa de Juros Nominal - Taxa de Inflação}$$

Inflação e o Valor do Dinheiro no Tempo

- Descontando fluxos de caixa: $100 a ser recebido 1 ano a partir de hoje, quando anual taxa de juros é de 10 %:

$$VP = \frac{\$100}{1.10} = \$90.91$$

- Descontando $100 a serem recebidos daqui a um ano quando a taxa de juros real é de 2.8% e a taxa de inflação esperada é de 7%.

$$VP = \frac{\frac{\$100}{1.07}}{1.028} = \frac{\$93.46}{1.028} = \$90.91$$

- Nota:
  - Fluxos de caixa NOMINAIS devem ser descontados a taxas de juros NOMINAIS
  - Fluxos de caixa REAIS devem ser descontados a taxas de juros REAIS