

O Valor do Dinheiro no Tempo

Finanças Corporativas I
Instrutor: Rogério Mazali
Aula 03

Agenda

- Valor Presente e Valor Futuro
 - O caso de um período
 - O caso de múltiplos períodos
 - Período de Composição
- Perpetuidades
- Anuidades
- Inflação

Questão Básica

- Um real pago hoje vale mais ou menos do que um real pago daqui a um mês?
- Por quê?

Valor Futuro: O caso de um período

- ***Juros***

- **Definição: Valor pago como rendimento do seu investimento**

- ***Valor Futuro(VF)***

- **Definição: Valor total que o seu investimento irá ter após receber juros**

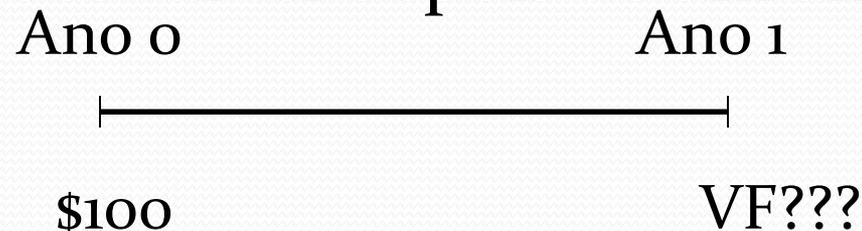
Valor Futuro: um período

- **Suponha:**

- Você possui \$100 em sua conta no banco (definido como Capital Inicial ou C_0)
- A taxa de juros atual é de 6% ao ano

- **Questão:**

- Quanto você vai ter depois de um ano?



Valor Futuro: um período

- *Juros Recebidos:*

$$\text{Juros} = \text{Capital Inicial} * \text{Tx. Juros}$$

$$\begin{aligned}\text{Juros} &= \$100 * 0.06 \\ &= \$6\end{aligned}$$

- *Valor Futuro (VF):*

$$\text{VF}_1 = \text{Capital Inicial} + \text{Juros Recebidos}$$

$$= \$100 + \$6 = \$100 + \$100 * 0.06$$

$$= 100 * (1 + 0.06)$$

$$= \$106$$

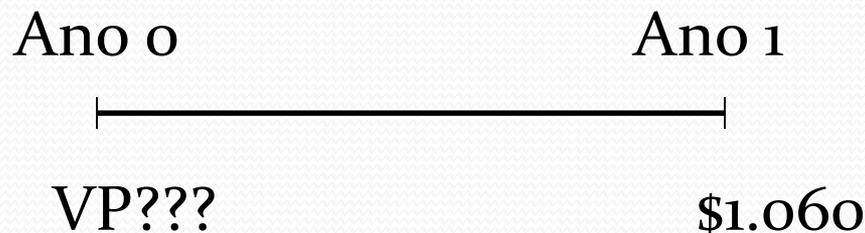
Valor Futuro: um período

- Fórmula Geral (1-período):

$$VF_1(C_0) = C_0 \times (1 + r)$$

Valor Presente: um período

- Suponha que você precise comprar um computador novo que custará \$1.060 daqui a um ano.
- Suponha que você não terá nenhuma renda neste período
- Quanto dinheiro você precisa ter em mãos hoje para conseguir comprar o computador em um ano?



Valor Presente: um período

Valor Presente

(VP)

Valor hoje de um
fluxo de caixa futuro.

Fator de Desconto

Valor presente de um
futuro pagamento de
valor \$1.

Taxa de Desconto

Taxa de juros usada
para computar o valor
presente de fluxos de
caixa futuros.

Valor Presente: um período

$$VF_1(C_0) = C_0 \times (1 + r)$$

$$\$1,060 = VP_0 \times (1 + 0.06)$$

$$VP_0 = \frac{1}{1 + 0.06} \times \$1,060$$

$$VP_0 = \frac{\$1,060}{1.06}$$

$$VP_0 = \$1,000$$

Valor Presente: um período

$$VP_0 = \frac{VF_1}{1+r}$$
$$= VF_1 \times \frac{1}{1+r}$$

Fator de Desconto de um período :

$$FD_1 = PV_0(\$1) = \frac{1}{1+r}$$

$$VP_0 = FD_1 \times VF_1$$

Exemplo

- Qual é o valor hoje de \$1 a ser pago daqui a um ano?
 - $r=10\% \Rightarrow FD_1 = \frac{1}{1+r} = \frac{1}{1+0.10} = \frac{1}{1.10} = 0.\overline{90}$
 - $r=5\% \Rightarrow FD_1 = \frac{1}{1+r} = \frac{1}{1+0.05} = \frac{1}{1.05} \cong 0.95$
 - $r=15\% \Rightarrow FD_1 = \frac{1}{1+r} = \frac{1}{1+0.15} = \frac{1}{1.15} \cong 0.87$
- Qual é o valor hoje de \$400 a serem pagos daqui a um ano se soubermos que $FD = 0.85$?

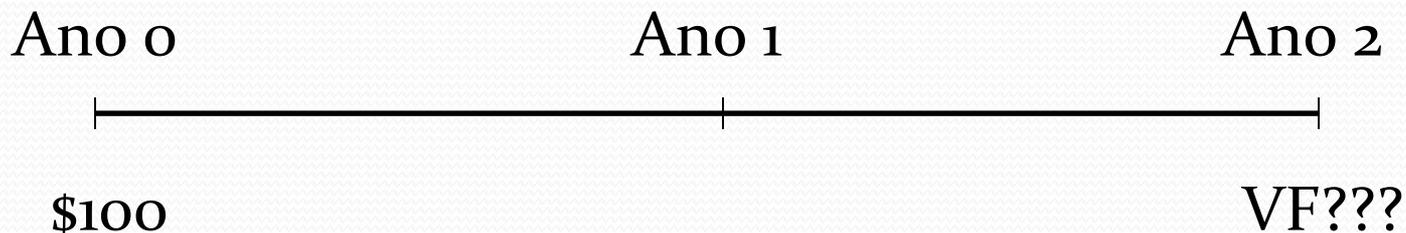
$$VP_0 = FD_1 \times VF_1 = 0.85 \times \$400 = \$340$$

Nota sobre taxas de desconto

- A taxa de desconto a ser usada é o custo de oportunidade do capital – a taxa de retorno oferecida por oportunidades de investimento comparáveis.
- A taxa de desconto adotada deve levar em conta:
 - O valor do dinheiro no tempo
 - O risco do fluxo de caixa

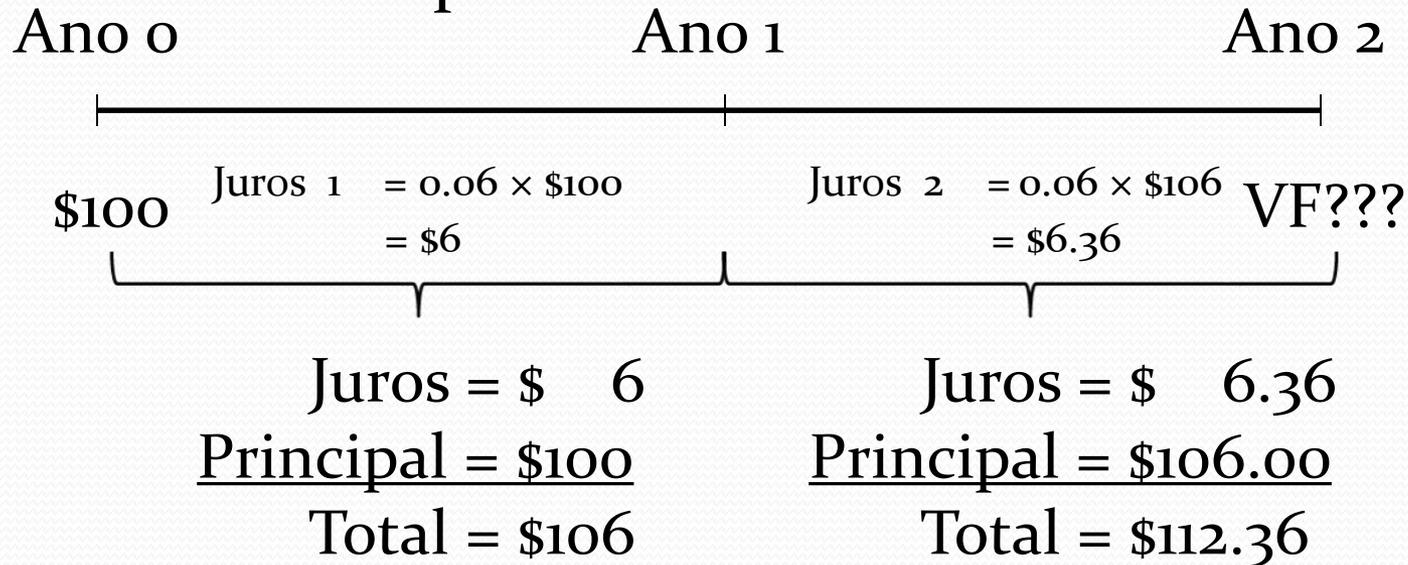
Valor Futuro: Múltiplos períodos

- **Suponha que:**
 - Você possui \$100 na sua conta no banco (definido como Capital Inicial ou C_0)
 - A taxa de juros atual é de 6% ao ano.
- **Questão:**
 - Quanto dinheiro você terá em 2 anos?



Juros Compostos

- Juros incidem sobre o investimento inicial e sobre juros obtidos no período anterior



- Equivalentemente:

$$VF_1 = VP_0 \times (1 + r)$$

$$VF_2 = VP_1 + VP_1 \times r = VP_0 \times (1 + r)^2$$

Juros Simples x Juros Compostos

- **Juros Compostos:**

$$VF_t(C_0) = C_0 \times (1 + r)^t$$

- **Juros Simples:**

$$VF_t(C_0) = C_0 \times (1 + t \times r)$$

- **Iremos sempre usar juros compostos ao longo do curso, exceto quando explicitado.**

Valor Futuro e Juros Compostos

- Exemplo: a venda da ilha de Manhattan:
 - Diz a anedota histórica que o explorador holandês Peter Minuit comprou a ilha de Manhattan por \$24 in 1626, onde fundou a cidade de Nova Amsterdam, mais tarde rebatizada de Nova York. Este foi um bom negócio para Peter Minuit?



Valor Futuro e Juros Compostos

- Para responder, podemos determinar quanto os \$24 pagos em 1626 valem hoje, em 2018, compostos a 8% ao ano (como escolher a taxa de juros correta será visto em capítulos futuros).

$$\begin{aligned}VF &= \$24 \times (1 + .08)^{392} \\ &= \$303,62 \text{ trilhões}\end{aligned}$$

Este valor é maior do que todo o PIB mundial em 2017. Portanto, maior do que o valor de todos os imóveis de Nova York somados. Portanto, este não foi um bom negócio para Peter Minuit.

Valor Presente e Juros Compostos

- Da mesma forma, podemos obter o valor presente de um fluxo de caixa a ser pago vários períodos no futuro
- Suponha que você precise comprar um computador novo que custará \$1.123,60 daqui a 2 anos.
- Suponha que você não terá nenhuma renda neste período, e que a taxa de juros no período é de 6% a.a.
- Quanto dinheiro você precisa ter em mãos hoje para conseguir comprar o computador em um ano?

Ano 0

Ano 1

Ano 2

VP???

\$1.123,60

Valor Presente e Juros Compostos

- Para obtermos \$1.123,60, precisamos poupar VP por 2 anos, obtendo:

$$\begin{aligned}VF_2 &= VP_0 \times (1 + .06)^2 \\ &= \$1.123,60\end{aligned}$$

$$VP_0 = \frac{VF_2}{(1 + .06)^2} = \$1.000,00$$

Juros Simples x Juros Compostos

- **Juros Compostos:**

$$VP_0(C_t) = \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

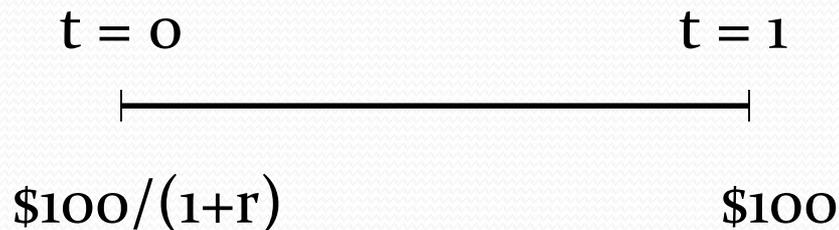
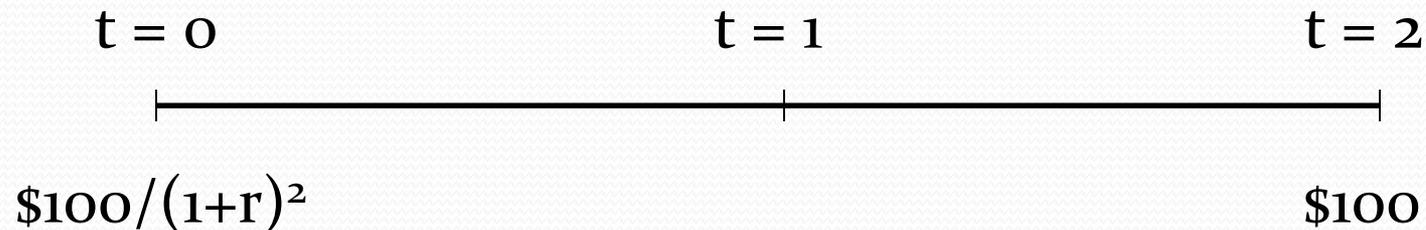
- **Juros Simples:**

$$VP_0(C_t) = \frac{C_t}{(1+t \times r)}$$

- **Iremos sempre usar juros compostos ao longo do curso, exceto quando explicitado.**

Avaliando Ativos de Vida Longa

- Você não pode comparar fluxos de caixa em dois pontos diferentes no tempo, digamos, $t=2$ e $t=1$!! Compare-os hoje, ou compare-os em $t=1$!



Exemplos

- Qual o valor hoje de \$15,000 a serem pagos daqui a 5 anos se $r=10\%$

- Quanto \$100 pagos hoje valerão daqui a 3 anos se $r=10\%$?

Fórmulas Gerais

- Valor Futuro:

$$VF_t = VP_0 \times (1 + r)^t$$

- Valor Presente:

$$VP_0 = VF_t \times \frac{1}{(1 + r)^t}$$

- Dadas quaisquer 3 das seguintes variáveis, vocês podem encontrar a quarta:
 - Valor Presente VP (PV)
 - Valor Futuro VF (FV), ou fluxo de caixa futuro Ct
 - Período de Tempo t
 - Taxa de Desconto r

Exemplos

1. Quanto você deve depositar hoje para ter \$1 milhão daqui a 25 anos? ($r=12\%$) **VP?**
2. Se um investimento de \$58,823.31 pagou \$1 milhão em 25 anos, qual é a taxa de juros? **$r?$**
3. Quantos anos levarão para \$58,823.31 se converterem em \$1 milhão se $r=12\%$? **$t?$**
4. Em quanto se converterá um investimento de \$58,823.31 depois de 25 anos se $r=12\%$? **VF?**

Exemplo

- **Porto Rico pede dinheiro emprestado**

- *Em 2007, o governo de Porto Rico precisou tomar perto de US \$ 2,6 bilhões por até 47 anos. Isto foi feito através da emissão de títulos do tesouro de Porto Rico, cada qual simplesmente prometendo pagar ao portador \$1,000 ao fim daquele tempo. A taxa de juros de mercado da época era de 5,15%. Qual o máximo valor que você estaria disposto a pagar por tal título?*

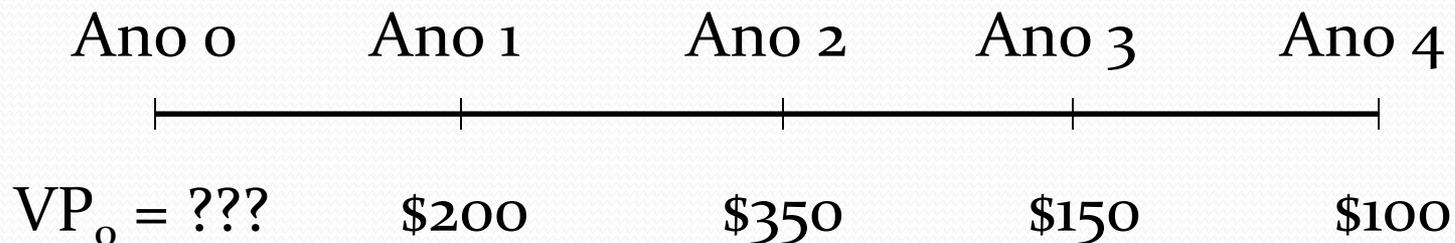
$$VP = \frac{\$1,000}{(1,0515)^{47}} = \$94.40$$

Agenda

- Fluxos de Caixa Múltiplos
 - VF de Fluxos de Caixa Múltiplos
 - VP de Fluxos de Caixa Múltiplos
- Perpetuidades
 - Como avaliar Perpetuidades
 - Como avaliar Anuidades
- Taxas de Juros Anuais Efetivas
 - Fluxos de Caixa Reais x Fluxos de Caixa Nominais
 - Inflação e Taxas de Juros
 - Avaliando pagamentos de caixa reais
 - Real ou Nominal?

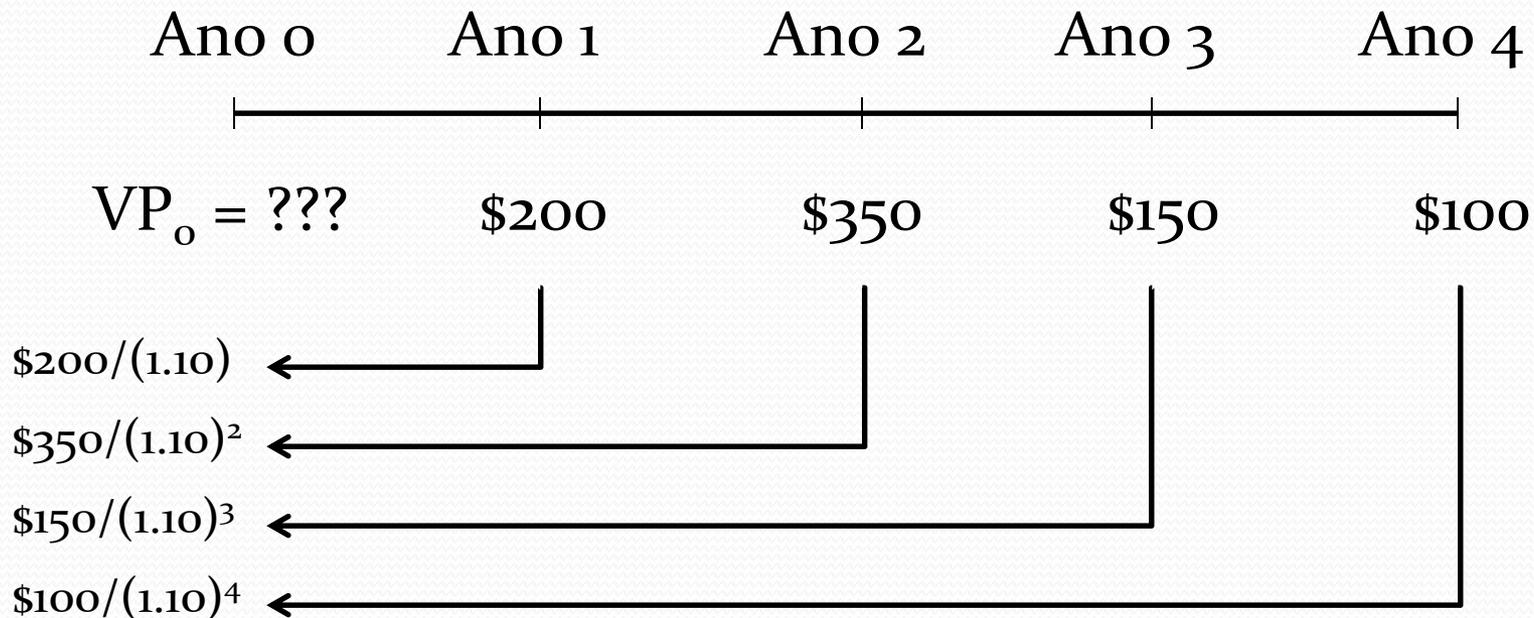
Múltiplos Fluxos de Caixa

- Considere o seguinte problema:
 - Você recebe o seguinte fluxo de caixa
 - Suponha $r = 10\%$

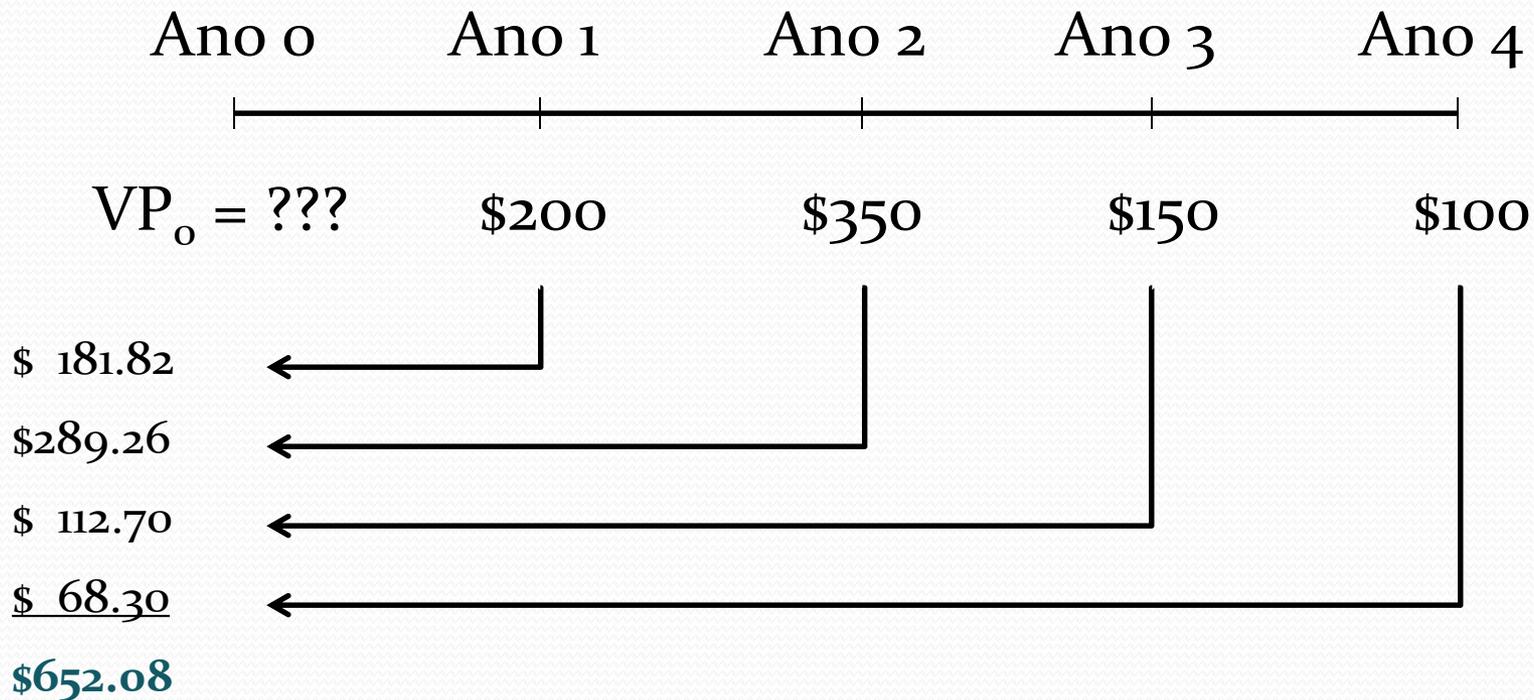


- Q: Como calcular o VP do fluxo de caixa acima?
- R: É só calcular o VP de cada FC e então somá-los.

Múltiplos Fluxos de Caixa

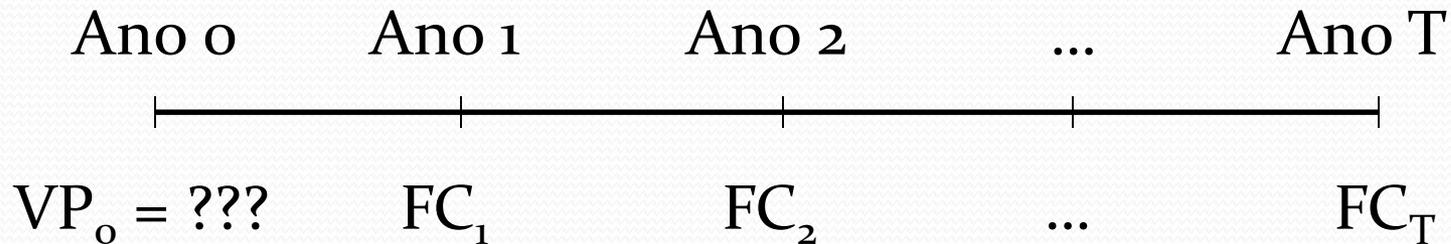


Múltiplos Fluxos de Caixa



Múltiplos Fluxos de Caixa

- De maneira geral, se tivermos T períodos:

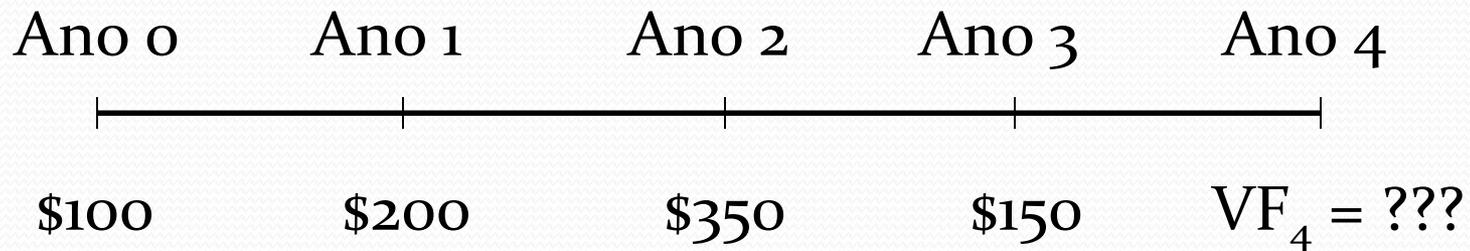


$$VP_0 = FC_0 + \frac{FC_1}{(1+r)} + \frac{FC_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{FC_T}{(1+r)^T}$$

$$VP_0 = \sum_{t=0}^T \frac{FC_t}{(1+r)^t}$$

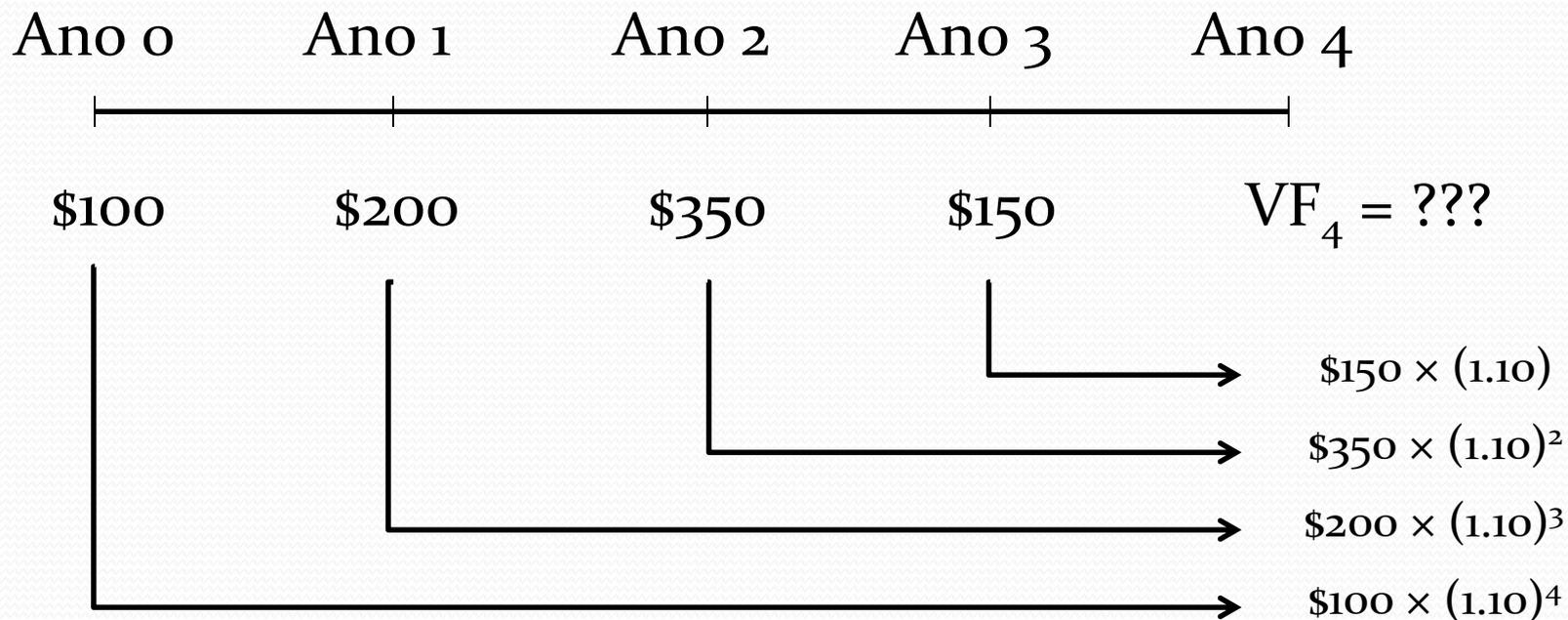
Múltiplos Fluxos de Caixa

- Considere o seguinte problema:
 - Você recebe o seguinte fluxo de caixa:
 - Suponha que $r = 10\%$

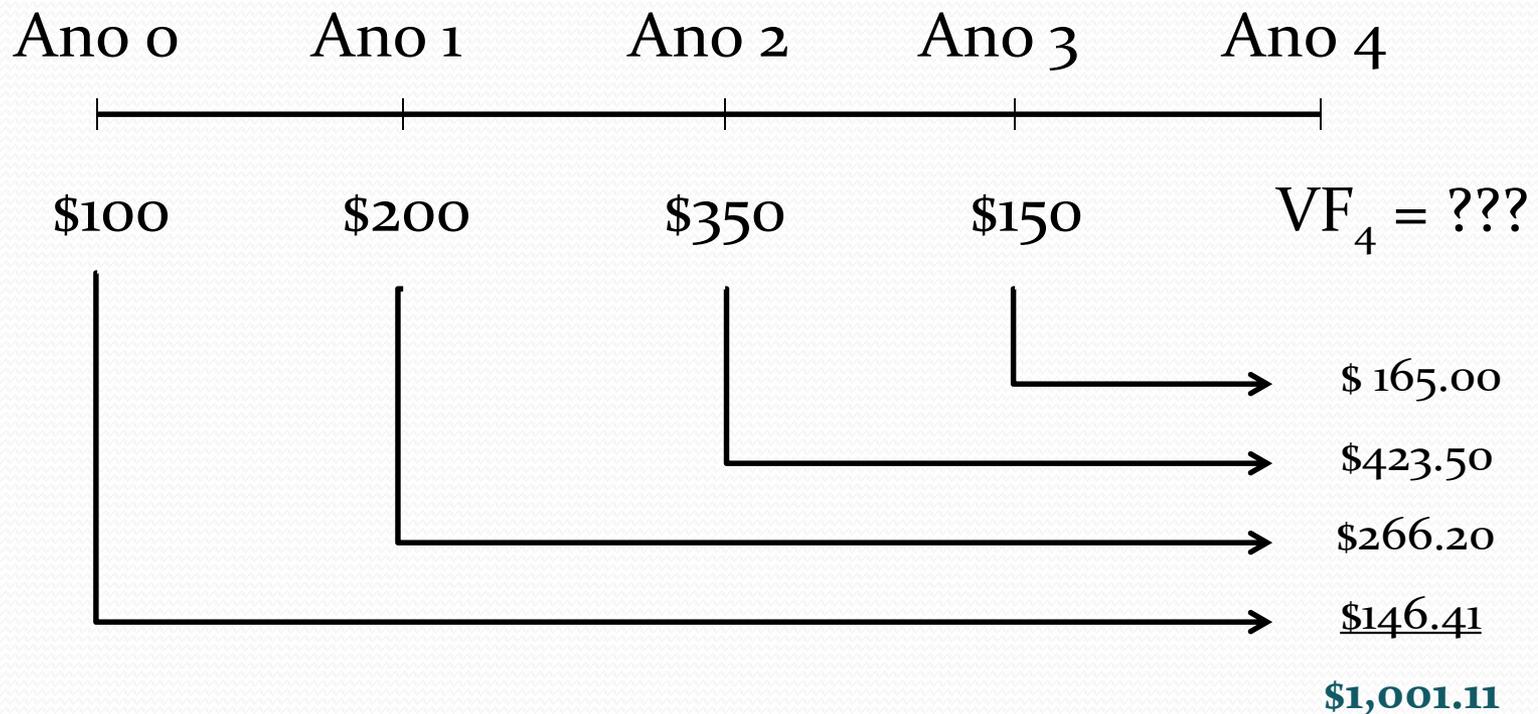


- Q: Como calcular o VF do fluxo de caixa acima?
- R: É só calcular o VF de cada FC e então somá-los.

Múltiplos Fluxos de Caixa

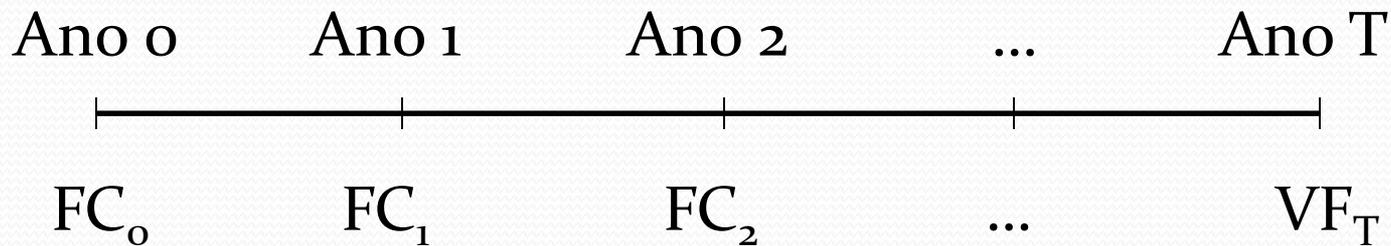


Múltiplos Fluxos de Caixa



Múltiplos Fluxos de Caixa

- De maneira geral, se tivermos T períodos:

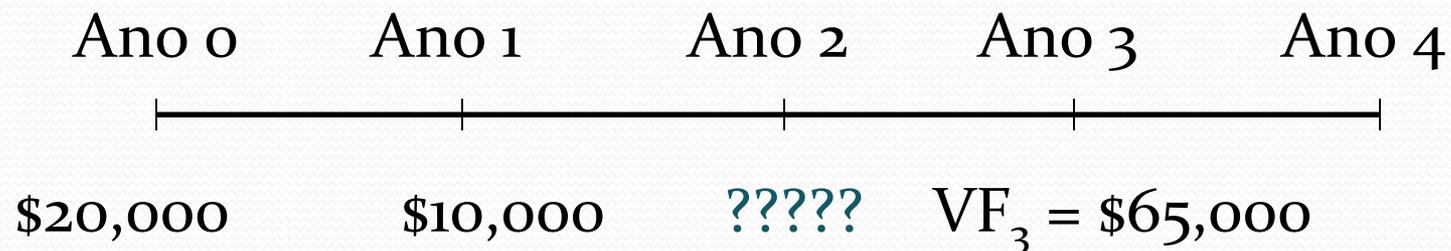


$$VF_T = FC_0 (1 + r)^T + FC_1 (1 + r)^{T-1} + FC_2 (1 + r)^{T-2} + \dots + FC_{T-1} (1 + r) + FC_T$$

$$VF_T = \sum_{t=0}^T FC_t (1 + r)^{T-t}$$

Exemplo

- Você está planejando escalar o Monte Everest nas suas férias daqui a 3 anos.
- Você precisa de \$65,000 para pagar pela viagem.
- Quanto dinheiro você precisa pôr em sua conta bancária no ano 2 para que consiga juntar \$65,000 no ano 3, se a taxa de desconto é de 2.5%?



Exemplo

- Este é um problema típico de valor futuro. Em termos algébricos,

$$VF_3 = \sum_{t=0}^3 FC_t (1+r)^{T-t} = \$65,000$$

$$\begin{aligned} & \$20,000 (1+0.025)^3 + \$10,000 (1+0.025)^2 \\ & + FC_2 (1+0.025) = \$65,000 \end{aligned}$$

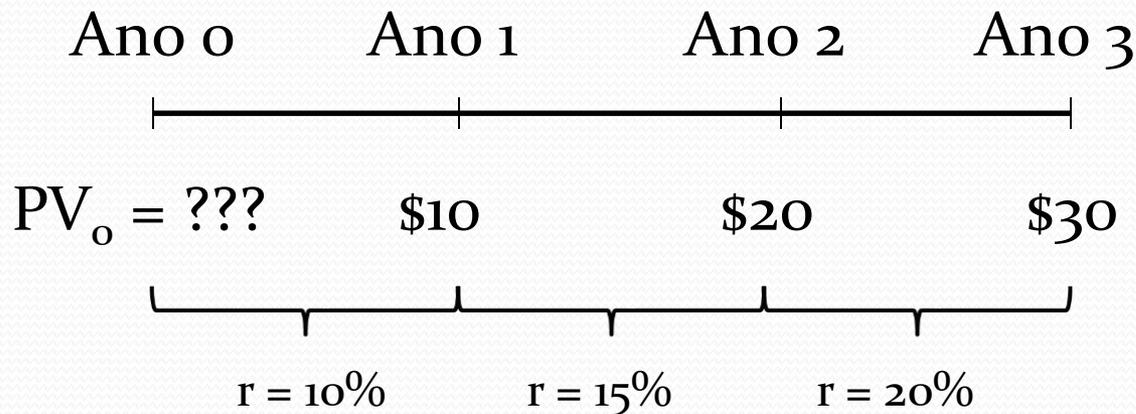
$$\$21,537.81 + \$10,506.25 + 1.025 \times FC_2 = \$65,000$$

$$1.025 \times FC_2 = \$32,955.94$$

$$FC_2 = \$32,152.14$$

Múltiplas Taxas de Desconto

- Considere o seguinte problema:



- **Problema: a taxa de desconto muda com o tempo**

Períodos de Composição

- Até aqui só colocamos taxas anuais de juros.
- No entanto, não há razão para pensar este será sempre o caso. Fluxos de caixa são muitas vezes compostos em períodos que não anuais
- Exemplo: Você toma dinheiro emprestado e paga juros semestralmente à taxa de 5%.
- Questão: Quanto você vai estar devendo no fim do ano? Seria 10% ao ano a taxa que você está realmente pagando?

Períodos de Composição

- Você toma \$100 emprestado por um ano composta semestralmente à taxa semestral de 5%.

$$VF_{1\text{-ano}} = \$100 * (1 + 0.05)^2 = \$110.25$$

- Portanto, a **Taxa Anual Efetiva** que você está pagando é:

$$(\$110.25/\$100) - 1 = 10.25\%$$

- Outra maneira de escrever isto:

$$(1 + r_{\text{Anual}}) = (1 + r_{\text{Semestral}})^2$$
$$r_{\text{Anual}} = (1 + 0.05)^2 - 1 = 10.25\%$$

TPA – Taxa Percentual Anual

- **Exemplo:**
- Você toma \$100 emprestado por um ano do seu cartão de crédito a uma TPA de 12%. Quanto dinheiro você estará devendo no fim do ano? Qual é a taxa anual efetiva?
- **TPA é diferente da Taxa Anual Efetiva.**
- **Taxa Anual Efetiva:** taxa anual que te dará a mesma quantia em dinheiro que você obteria à taxa anual depois de um ano
$$(1 + \text{Taxa Anual Efetiva}) = (1 + \text{Taxa Mensal})^{12}$$
- **Taxa Percentual Anual(TPAs):** taxa anual aproximada:
$$\text{TPA} = 12 \times \text{Taxa Mensal}$$

TPA – Taxa Percentual Anual

- Passo 1: Encontre a Taxa de Juros Mensal

$$r_{\text{mensal}} = \text{TPA}/12 = 12\%/12 = 1\%$$

- Passo 2: Converta-a em Taxa Anual Efetiva

$$r_{\text{anual}} = (1 + 0.01)^{12} - 1 = 12.62\%$$

- Passo 3: Encontre o Valor Futuro

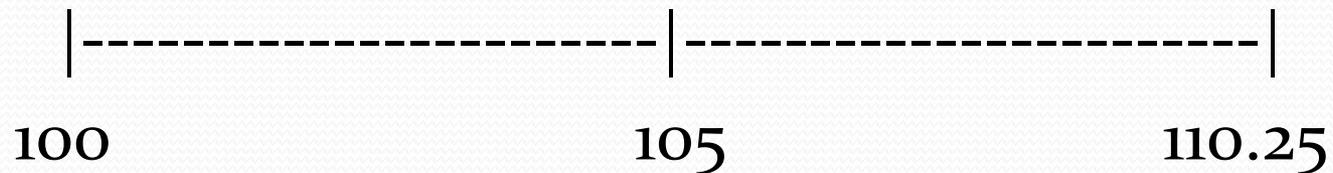
$$\begin{aligned} \text{VF}_{1\text{-ano}} &= \$100 \times (1 + r_{\text{anual}}) \\ &= \$100 \times (1.1262) \\ &= \$112.62 \end{aligned}$$

Períodos de Composição (r=10%)

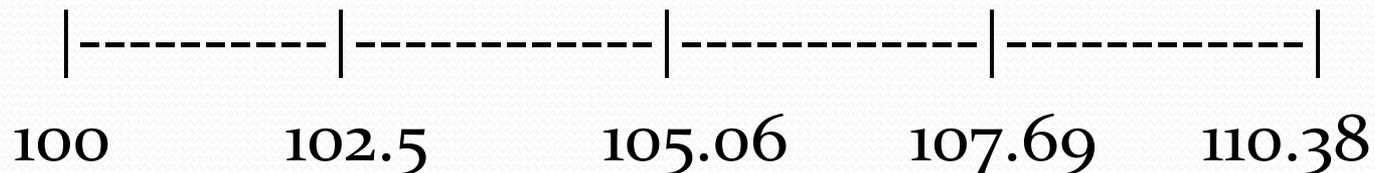
- Anual:



- Semestral



- Trimestral:



Taxas de Juros Anuais Efetivas

Período de Composição	Períodos por Ano (m)	Taxa de Juros Por Período	Fator de Crescimento dos Fundos Investidos	Taxa Anual Efetiva
1 ano	1	6%		1,06 6,0000%
Semestral	2	3%	$1,03^2 =$	1,0609 6,0900%
Trimestral	4	1,50%	$1,015^4 =$	1,0613636 6,1364%
Mensal	12	0,50%	$1,005^{12} =$	1,0616778 6,1678%
Semanal	52	0,11538%	$1,0011538^{52} =$	1,0617973 6,1797%
Diário	365	0,01644%	$1,0001644^{365} =$	1,0618377 6,1838%
Contínuo			$e^{0,06} =$	1,0618365 6,1837%

Períodos de Composição

- A relação entre VP e VF quando os juros são compostos M vezes por ano é dada por e r é dada como TPA:

$$FV_1 = PV_0 \times (1 + r / M)^M$$

- A relação entre VP e VF **por N anos de juros incidentes** quando os juros são compostos M vezes por ano é dada por e r é dada como TPA:

$$FV_N = PV_0 \times (1 + r / M)^{M \times N}$$

Períodos de Composição

- A relação entre VP e VF quando os juros são compostos M vezes por ano é dada por e r é dada como TPA:

$$PV_0 = FV_1 / (1 + r / M)^M$$

- A relação entre VP e VF **por N anos de juros incidentes** quando os juros são compostos M vezes por ano é dada por e r é dada como TPA:

$$PV_0 = FV_N / (1 + r / M)^{M \times N}$$

Exemplo

- Encontre o VP de \$500 recebidos no futuro sob as seguintes condições:
 - 12% taxa nominal, composta semestralmente, por 5 anos
 - 12% taxa nominal, composta trimestralmente, por 5 anos

$$VP_0 = \frac{\$ 500}{\left(1 + \frac{0.12}{2}\right)^{2 \times 5}} = \frac{\$ 500}{(1 + 0.06)^{10}} = \$ 279.20$$

$$VP_0 = \frac{\$ 500}{\left(1 + \frac{0.12}{4}\right)^{4 \times 5}} = \frac{\$ 500}{(1 + 0.03)^{20}} = \$ 276.84$$

Composição Contínua

- Quando M se aproxima do infinito, $(1 + r/M)^M$ se aproxima de $e^r \approx (2.718)^r$
- Então $(1 + r/M)^{MN}$ se aproxima de $e^{rN} = (2.718)^{rN}$
- Exemplo: o valor futuro de \$100 composto continuamente a 10% por um ano é de:

$$VF_{1\text{-ano}} = 100 * e^{0.1} = \$110.517$$

- Exemplo: O valor presente de \$100 pagos depois de um ano quando os juros compostos continuamente a 10%:

$$VP_0 = 100 * e^{-0.1} = \$90.48$$