

GEOMECC

BOLETIN DE DIVULGACION GEOTECNICA

Laboratorio de Mecánica de Rocas. Universidad Central de Venezuela.

EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS
EN LAS APLICACIONES GEOTECNICAS
" INTRODUCCION AL METODO "

G. PERRI, M. CASTILLEJO, G. TORREALBA



Nº

1

JULIO, 1981

caracas

" GEOMECC " quiere ser un " boletín de divulgación geotécnica ", aclarando con esto la falta de toda pretensión (pero no de aspiración) de representar una revista científica de alto nivel y marcando nuestro objetivo primordial en la difusión (entre estudiantes, docentes y profesionales) de aspectos y argumentos específicos de las disciplinas geotécnicas. Recogiendo con esto ciertas inquietudes difundidas, relativas a la falta de material bibliográfico directamente accesible en esta rama de la ingeniería.

De no menor prioridad e interés es también nuestro objetivo de crear un instrumento capaz de satisfacer informalmente las necesidades que tiene nuestra comunidad universitaria que opera en este sector científico, de ordenar, publicar y divulgar todos aquellos resultados importantes de las actividades de estudio, enseñanza e investigación que venimos desarrollando. Y más aún, confiamos representar un estímulo nuevo para estas actividades mismas.

Finalmente aspiramos a todas colaboraciones ajenas a nuestra comunidad, convencidos como somos de la universalidad de la ciencia.

Caracas, julio de 1981

Damos comienzo con este N.º 1 de " GEOMECC " a la publicación de una serie de trabajos que desde hace algún tiempo, se están llevando adelante bajo la coordinación de la Cátedra de " Mecánica de Rocas ", con el objetivo de ampliar y profundizar los conocimientos acerca del uso que puede hacerse del Método de los Elementos Finitos en el campo de las aplicaciones geotécnicas.

Comenzamos con esta nota introductoria sobre los fundamentos físicos y matemáticos del método para seguir con la publicación de unas primeras aplicaciones, así como de la extensión de estos fundamentos y aplicaciones a los casos más generales de comportamiento de los materiales y estructuras geotécnicas.

EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS
EN LAS APLICACIONES GEOTECNICAS
" INTRODUCCION AL METODO "

POR: GIANFRANCO PERRI, MIGUEL CASTILLEJO, GILBERTO TORREALBA (*)

(*)

*Departamento de Minas, Escuela de Geología Minas y Geofísica,
Facultad de Ingeniería - U.C.V.*

1.- INTRODUCCION

El Ingeniero Geotécnico dispone de diferentes métodos para el diseño de fundaciones, de excavaciones, de estructuras en rocas ó en suelos en general.

Según Goodman y Duncan, que hacen referencia a las estructuras rocosas, estos métodos pueden agruparse en tres clases principales:

- a.- Métodos empíricos, que se basan principalmente en la experiencia que se dispone en la construcción de estructuras similares a la del proyecto.
- b.- Métodos del equilibrio límite global y de la plasticidad límite, que llegan a calcular las soluciones límites del problema, permitiendo estas el diseño de estructuras sobre la base de seguridad de una estabilidad global.
- c.- Métodos de los esfuerzos y deformaciones, que consisten en sus fases previas de aplicación, en el cálculo en cada punto de la estructura, de los esfuerzos y de las deformaciones. Son por lo tanto, sin duda, los más completos, debido al tipo de información que pueden suministrar y a la naturaleza de las distintas condiciones que permiten tomar en cuenta.

Más explícitamente, se trata de determinar para una estructura dada en cada punto de ella, el estado de esfuerzos:

$$\{ \sigma_{i, j} \} = \left\{ \begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{array} \right\} \quad (1)$$

y el estado de deformaciones:

$$\{\epsilon_{i, j}\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{array} \right\} \quad (2)$$

una vez que sea definido y conocido el modelo geomecánico del problema en estudio, el que comprende la geometría de la estructura, las condiciones de borde y las leyes constitutivas de los materiales que constituyen el sistema, o sea la relación matemática entre esfuerzos y deformaciones:

$$\{\sigma_{i, j}\} = [D] \{\epsilon_{i, j}\} \quad (3)$$

Estos tipos de problemas a su vez pueden resolverse por tres grupos distintos de métodos: analíticos, experimentales y numéricos.

Los métodos analíticos, que más frecuentemente fueron empleados en el pasado, llevan al cálculo de fórmulas resolutivas para los esfuerzos y deformaciones; pero dichas fórmulas aún para problemas planos son difíciles de obtener y casi siempre imposibles para las estructuras geotécnicas reales que se presentan generalmente complejas ya sea por su geometría ó por el comportamiento mecánico de los materiales que la constituyen. Entre estos métodos analíticos, aquellos desarrollados más ampliamente, derivan de la aplicación de la teoría clásica de la elasticidad lineal, aunque son interesantes algunas soluciones obtenidas en el campo de la elasticidad no lineal, de la elastoplasticidad y de la viscoelasticidad.

Los métodos experimentales han sido hoy en día casi completamente superados por los métodos numéricos, gracias al notable desarrollo y al extenso empleo de las computadoras.

Dentro de los métodos numéricos, como último en orden cronológico se encuentra el Método de los Elementos Finitos, el cual ha logrado

una gran generalidad de empleo en la solución de problemas aplicativos por su gran versatilidad y potencia y debido a que permite analizar una cantidad sin número de situaciones que bien aproximan la compleja realidad de las estructuras geotécnicas.

En efecto si se quiere progresar significativamente en el estudio y análisis de estructuras en el campo de la mecánica de rocas, se hace absolutamente necesaria la adopción de un modelo matemático que simule con buena aproximación la naturaleza compleja de la roca.

El Método de Elementos Finitos provee tal modelo, permitiendo considerar en una solución, muchas de las variables que se encuentran en los problemas de mecánica de rocas. Este modelo se puede visualizar como un arreglo de áreas o porciones finitas ordenadas de tal manera que idealicen el macizo rocoso y las estructuras en él comprendidas.

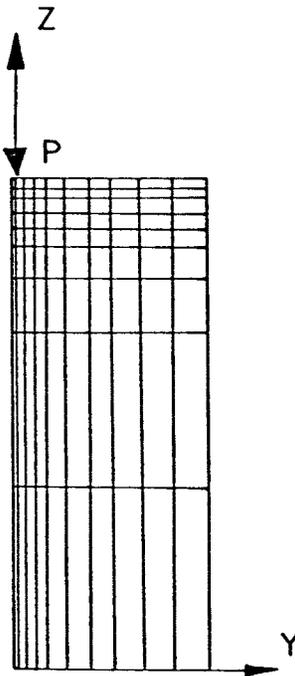
Extensos rangos geológicos, como fallas y estratificaciones, se consideran como condiciones límites del modelo y se llevan como tales al mismo. Así mismo la esquistosidad y las diaclasas, que generalmente son estructuras más pequeñas que las dimensiones del elemento, se consideran dentro del análisis en la forma en que influyen en el comportamiento de la roca (modelos anisótropos).

El MEF es fundamentalmente un método de aproximación simplemente física en el que: "Se comienza por subdividir al medio continuo que representa la estructura en regiones más pequeñas, a cada una de las cuales se le pueden asignar diferentes propiedades físicas elásticas o incluso anelásticas. Cada uno de estos elementos está conectado con los demás mediante "nodos", donde participa de una serie de desplazamientos comunes. (Fig. 1).

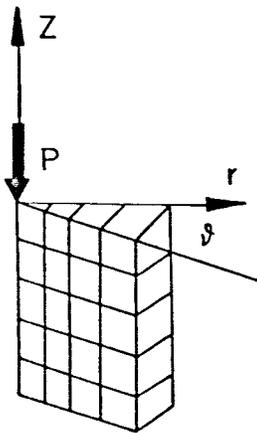
Suponiendo el sistema de desplazamientos en el interior de cada elemento definido en función de los desplazamientos nodales y aplicando entonces los conocidos teoremas de variaciones, se pueden relacio



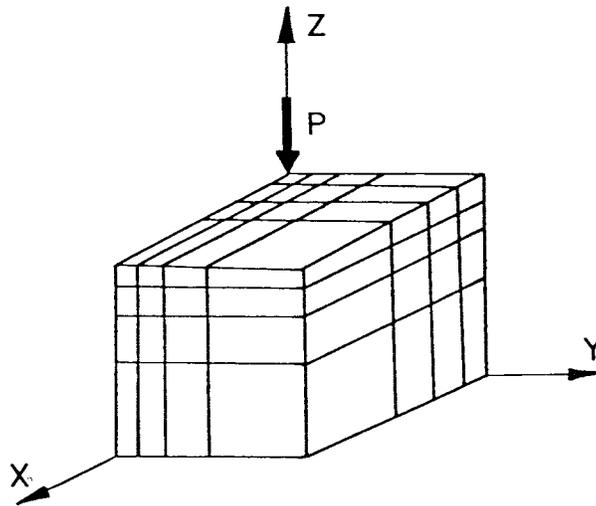
MODELO MONODIMENSIONAL



MODELO PLANO



MODELO AXIALSIMETRICO



MODELO TRIDIMENSIONAL

EJEMPLOS DE IDEALIZACION DE UNA ESTRUCTURA CON ELEMENTOS FINITOS

FIG. 1

nar los desplazamientos nodales con una serie de fuerzas ficticias aplicadas en los nodos.

El conjunto de elementos y la solución final, siguen los esquemas habituales del cálculo estructural, disfrutando en todo momento de una cierta visión física del problema". (ZienKiewicz).

Las exigencias prácticas del diseño estructural fueron sin duda las causas motoras que siempre impulsaron a los ingenieros hacia la búsqueda y formulación de métodos de cálculos nuevos y ajustados cada vez más a las necesidades de un cálculo estructural menos empírico y más aproximado, conforme a los modernos proyectos en ejecución.

Es así que también para el caso del "Método de los Elementos Finitos", su idealización, primeras formulaciones y aplicaciones, son obras de ingenieros, mientras que posteriormente el matemático se ha tomado la tarea de formular los fundamentos teóricos y naturalmente aportar sus estudios y conocimientos para la evolución y perfeccionamiento del método mismo.

En realidad resulta difícil establecer con nombres y fechas el descubrimiento del método, debido a que su formulación primaria ya deriva del aporte de formulaciones más antiguas. Además hay que añadir que el desarrollo del método como tal, está íntimamente unido a la aparición y posterior desarrollo de las modernas computadoras, sin la existencia de las cuales cualquier método de cálculo numérico del tipo de los Elementos Finitos está destinado a no encontrar ninguna posibilidad de aplicación práctica ni posterior evolución.

Es en 1960 cuando por primera vez se emplea el nombre del método, por parte de Clough en su publicación "El método de los elementos finitos en el análisis de esfuerzos planos".

En esta publicación el método fue presentado como una extensión de las técnicas del análisis estructural a la solución de problemas de

mecánica del continuo. Ahora bien como confirmación de lo anteriormente dicho, fue fácil averiguar que el método propuesto independientemente por Clough, se presentaba prácticamente idéntico al formulado muchos años atrás por Courant en 1943, que a su vez había presentado una extensión importante del método que Ritz en 1909 desarrolló para dar una solución aproximada a los problemas de campo en mecánica del continuo.

El Método de los Elementos Finitos hasta hoy en día ha sido usado en una gran variedad de campos, en problemas tridimensionales, problemas que involucran materiales y geometrías no lineales, problemas de dependencia del tiempo, de heterogeneidad y anisotropía; y finalmente en muchas áreas extrañas a la ingeniería estructural como movimientos de flúidos, transferencia de calor, análisis de campos magnéticos, etc.

Una presentación satisfactoria de los fundamentos teórico-matemáticos del método llevaría muchas páginas y por lo tanto se considera conveniente enviar al lector interesado a la numerosa bibliografía existente. (*).

Se considera sin embargo útil, antes de pasar a la ilustración de las aplicaciones del método a problemas geotécnicos, y en particular de mecánica de rocas, dar aquí algunos conceptos fundamentales que facilitarán la comprensión físico - intuitiva del mismo.

(*) D. Norrie y G. de Vries (IFI PLENUM 1976) han recogido una excelente bibliografía que muestra el siguiente número de publicaciones por año: 1961 (10) - 1962 (15) - 1963 (25) - 1964 (33) - 1965 (67) - 1966 (134) - 1967 (162) - 1968 (303) - 1969 (513) - 1970 (510) - 1971 (844) - 1972 (1004) - 1973 (1169) - 1974 (1377) - 1975 (880 incompletas).

En particular en vez de afrontar el tema en su más general desarrollo matemático, se prefiere limitar el campo de una tal presentación, particularizando el problema y preocupándose de ilustrar la relación lógica e intuitiva del M.E.F. con el conocido campo del análisis estructural clásico y luego matricial.

Finalmente cabe aquí señalar y subrayar, que todo lo que sigue pretende ser encaminado hacia las aplicaciones específicas del método al campo de la mecánica de rocas, lo que en muchos aspectos limita la visión con respecto a aquella que resultaría de un enfoque completamente general del problema.

2.- EL ANALISIS ESTRUCTURAL Y LA FORMULACION MATRICIAL DEL METODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

2.1.- INTRODUCCION

El análisis estructural es la metódica investigación de la estabilidad, resistencia y deformabilidad de las estructuras.

El análisis estructural, es un campo en evolución; los métodos de los análisis clásicos estaban ampliamente basados sobre el conocimiento físico del comportamiento estructural. Históricamente el análisis estructural se ha desarrollado a lo largo de dos distintas trayectorias: "la mecánica vectorial", basada sobre los principios del equilibrio estático y la geometría de las deformaciones; "la mecánica del trabajo virtual", basada sobre el principio de la conservación de la energía.

Matemáticamente, el análisis estructural se basa sobre la aceptación de una amplia serie de teoremas, cada uno de los cuales, o cada grupo de los cuales, aplican y utilizan la función del problema en análisis y del método de solución empleado.

En tiempos modernos, la disponibilidad de grandes y veloces máquinas de computación, ha cambiado el cuadro del análisis estructural, por lo menos en lo que se refiere a los métodos de solución, quedando siempre fijos los principios (teoremas) matemáticos originales.

Los métodos de estudio y cálculo han ido transformándose siempre más en función de las exigencias de las computadoras, esto es, hacia formulaciones de tipo numérico: la formulación matricial de los cálculos.

Los métodos matriciales son esencialmente métodos capaces de tratar grandes volúmenes de números y por consecuencia capaces de analizar

estructuras de cualquier tamaño y complejidad.

Además, el método matricial provee una manera cómoda, económica y elegante de mostrar las relaciones básicas interexistentes entre las variables, que son numerosas, en juego.

De hecho la forma matricial constituye la moderna y más usada metodología del análisis destinada seguramente a suplantarlo definitivamente en las aplicaciones, todas las formulaciones clásicas.

Seguramente dos son los métodos fundamentales de análisis estructural universalmente aplicables a estructuras de cualquier tipo: "el método de las fuerzas" (o de flexibilidades) y "el método de los desplazamientos" (o de rigideces).

Los dos métodos son muy similares entre ellos; mientras en el primero las fuerzas son las incógnitas del problema, en el segundo las incógnitas las representan los desplazamientos.

En el método de las fuerzas, debe ser resuelto un sistema de ecuaciones de geometría, de número igual al de las fuerzas incógnitas (los grados de indeterminación estática de las estructuras) para determinar aquellas fuerzas mismas.

En el método de los desplazamientos, debe ser resuelto para determinar los desplazamientos incógnitos, un sistema con un número de ecuaciones de equilibrio igual al de las incógnitas (los grados de indeterminación cinemática de la estructura).

Las ventajas para la elección entre uno y otro método para la solución de un determinado problema, pueden estar concentradas en el número de incógnitas contenidas en cada una de las dos formulaciones.

Si el número de incógnitas de desplazamientos, (también llamadas grados de libertad) " k ", es menor que el número de incógnitas de fuer-

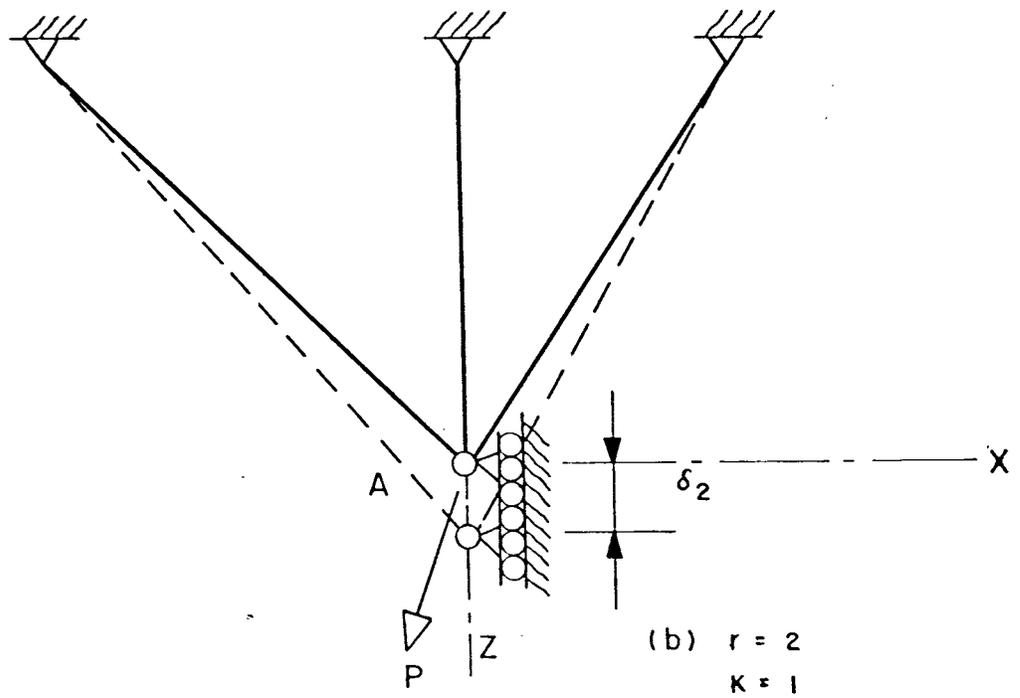
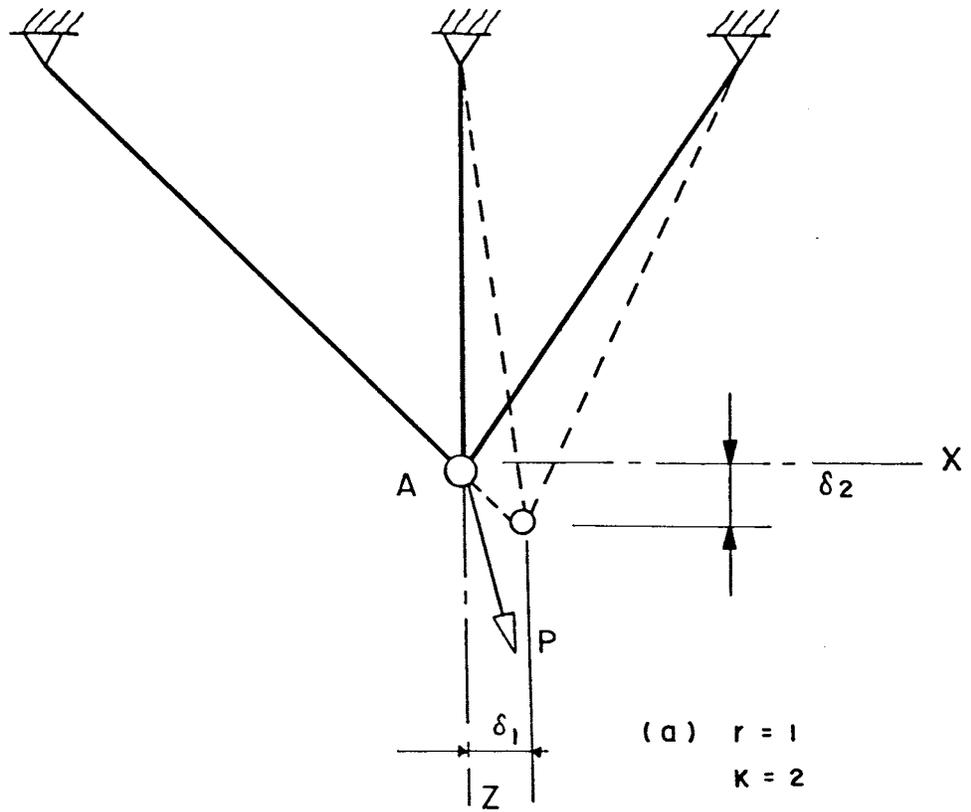
zas, "r", es ventajoso el método de los desplazamientos. Si por el contrario "r" es menor que "k", deberá preferirse el método de las fuerzas. La figura 2 ilustra este concepto; la figura (a) muestra una estructura reticular con tres elementos y un sólo grado de indeterminación estática ($r = 1$), mientras que el nodo A presenta dos componentes de desplazamientos incógnitas, o sea dos grados de libertad ($k = 2$). Entonces para la solución del problema, el método de la fuerza requiere la solución de una sola ecuación de geometría, mientras que el método de desplazamiento requiere resolver dos ecuaciones de estática.

Si ahora se modifica la estructura añadiendo un soporte horizontal al nodo A, así como se muestra en la figura (b), los grados de libertad se limitan a uno sólo ($k = 1$), mientras que los grados de indeterminación estática se han transformado en dos ($r = 2$). Para este caso, debería ser preferido el método de los desplazamientos.

Hay que añadir que el método de los desplazamientos en su formulación matricial se presenta mucho más efectivo para la automatización del cálculo y esto lo hace preferible también en gran número de casos en que "k" es mayor que "r". En efecto, la mayor parte de los métodos rutinarios del cálculo estructural con computadoras, se basan sobre el método de los desplazamientos así como el mismo Método de los Elementos Finitos; el que se presentará posteriormente y que representa el más potente y versátil método del cálculo estructural disponible.

El método de los desplazamientos, pasa en su aplicación, a través de la secuencia de cuatro operaciones fundamentales:

- 1.- Cálculo de la relación fuerzas - desplazamientos, o sea de la rigidez.
- 2.- Establecimiento de las relaciones geométricas.



GRADOS DE INDETERMINACION ESTATICA Y CINEMATICA

FIG.2

- 3.- Establecimiento de las ecuaciones de equilibrio para determinar los desplazamientos incógnitos.
- 4.- Cálculo de las fuerzas por sustitución de los desplazamientos en contrados en el punto tres, en la relación fuerzas - desplazamientos del punto uno.

Antes de pasar a ilustrar la formulación matricial del método de los desplazamientos, es conveniente comentar algo sobre la mencionada relación fuerza - desplazamiento o "rigidez" de un elemento estructural simple, como la de una estructura completa.

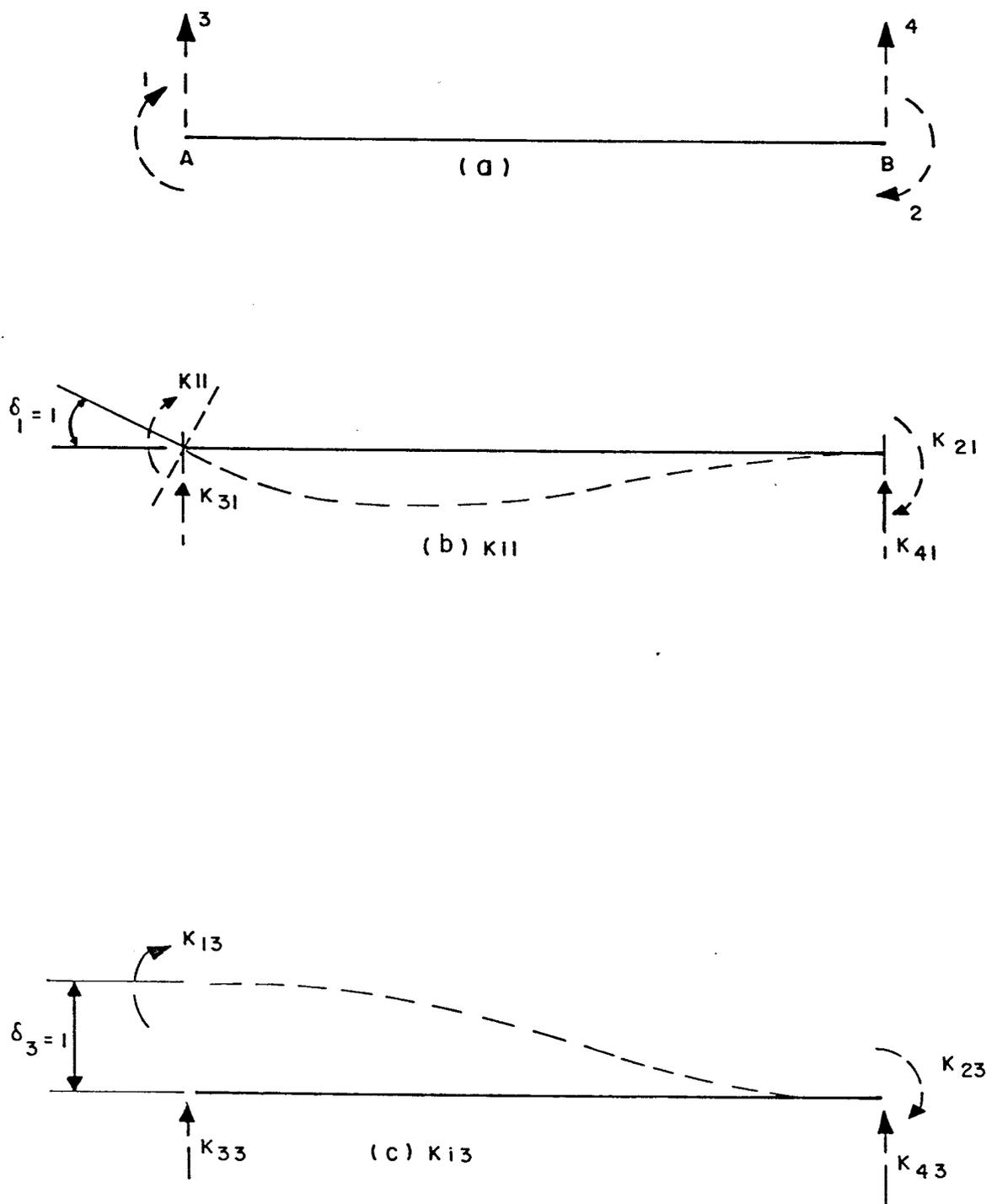
Para definir el concepto de rigidez de un elemento, se considere una viga (miembro elemental ó elemento) para la cual se enumeran sus extremos (nodos): para cada componente de las reacciones que se pueden transmitir en el elemento se individualiza un nodo y se procede a la numeración de aquellos. (*).

En la figura 3a, por ejemplo, se muestra la numeración relativa a una viga prismática plana y elástica para la cual se considera la existencia de dos componentes de sollicitación en cada extremo: una fuerza vertical y un momento flector; por lo tanto hay cuatro componentes y cuatro nodos numerados de 1 al 4.

Ahora bien el término general k_{ij} de la rigidez (ó matriz de rigidez) del elemento se define de la siguiente forma:

" k_{ij} es la fuerza que aplicada al nodo "i" produce un desplazamiento unitario en el nodo "j", mientras que todos los demás desplazamientos en los demás nodos del elemento son cero".

(*) En realidad, en este caso se trata de nodos ficticios, siendo los nodos reales geométricos solamente 2: los extremos de la viga.



VIGA PRISMATICA ELASTICA

FIG. 3

La figura 3b, por ejemplo, muestra la deformada de la viga debido a la rotación unitaria $\delta_1 = 1$ del nodo 1 (mientras que todos los otros tres desplazamientos del elemento son cero) y las correspondientes componentes de la rigidez k_{i1} .

De la misma manera la figura 3c, muestra las componentes k_{i3} debido a un desplazamiento unitario del nodo 3 cuando los otros desplazamientos son cero.

Las componentes k_{ij} ($i = j$) que son K_{11} para la figura 3b y K_{33} para la figura 3c, pueden ser visualizadas como "cargas" con desplazamientos unitarios en sus puntos de aplicación; mientras que las componentes k_{ij} ($i \neq j$) que son todas las demás, pueden verse como reacciones de los vínculos a los movimientos impedidos.

La determinación de las componentes de rigidez de un elemento, puede obtenerse mediante la solución de un problema estáticamente indeterminado en el cual se calculan todas las reacciones debidas a desplazamientos unitarios producidos en cada nodo y aplicados todos al mismo tiempo.

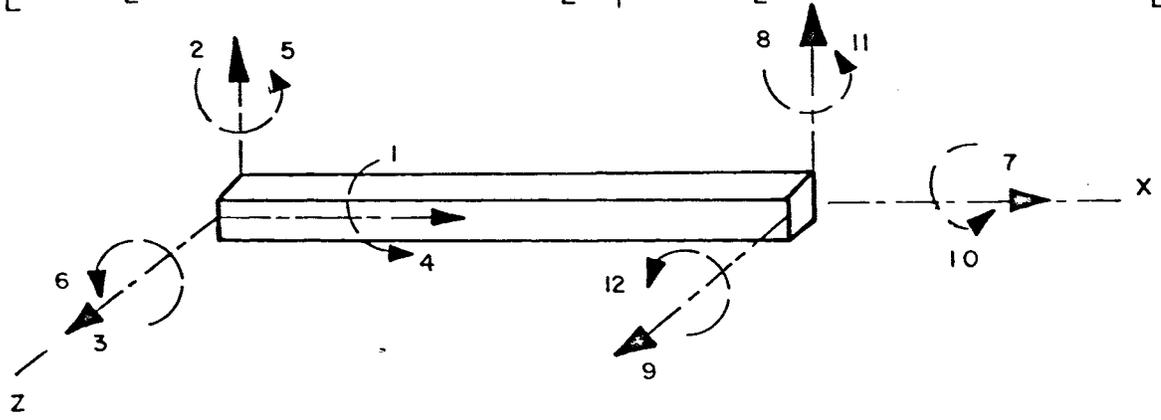
La viga prismática plana y elástica ilustrada, representa el más simple elemento estructural que en su forma más general posee 12 nodos, o sea 6 componentes de fuerzas y deformaciones para cada extremo: 3 fuerzas y 3 momentos (figura 4). En consecuencia existen 144 componentes de la matriz de rigidez de los cuales 40 diferentes que cero; la matriz es además simétrica y se da en la misma figura 4 siendo: L el largo de la viga, E el módulo de elasticidad longitudinal, I_y el momento de inercia respecto a "y", I_z el momento de inercia respecto a "z", "G" el módulo de elasticidad tangencial, "C" el momento de inercia polar, "A" la sección transversal.

Pasando ahora a definir la rigidez (o matriz de rigidez) de una estructura $|K|$, se comienza con considerar la estructura misma como el conjunto de un cierto número de "elementos" para cada uno de los

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\frac{EA}{L}$											
2		$\frac{12EI_z}{L^3}$										
3			$\frac{12EI_y}{L^3}$									
4				$\frac{GC}{L}$								
5			$-\frac{6EI_y}{L^2}$		$\frac{4EI_y}{L}$							
6		$\frac{6EI_z}{L^2}$				$\frac{4EI_z}{L}$						
7	$-\frac{EA}{L}$						$\frac{EA}{L}$					
8		$-\frac{12EI_z}{L^3}$				$-\frac{6EI_z}{L^2}$		$\frac{12EI_z}{L^3}$				
9			$-\frac{12EI_y}{L^3}$		$\frac{6EI_y}{L^2}$				$\frac{12EI_y}{L^3}$			
10				$-\frac{GC}{L}$						$\frac{GC}{L}$		
11			$-\frac{6EI_y}{L^2}$		$\frac{2EI_y}{L}$				$\frac{6EI_y}{L^2}$		$\frac{4EI_y}{L}$	
12		$\frac{6EI_z}{L^2}$				$\frac{2EI_z}{L}$		$-\frac{6EI_z}{L^2}$				$\frac{4EI_z}{L}$

SIMETRICA

$|K| =$



ELEMENTO ESTRUCTURAL PRISMATICO

FIG. 4

cuales esté definida la rigidez (o matriz de rigidez del elemento $|K|_e$).

La rigidez de la estructura se obtiene mediante una adecuada superposición o ensamblaje de las rigideces de los elementos que la constituyen. Es esencial que cada nodo de la estructura sea cuidadosamente numerado y que la numeración nodal de cada elemento corresponda en una forma establecida a la de la estructura.

2.2.- LA FORMULACIÓN MATRICIAL DEL METODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

En la formulación matricial se relacionan las fuerzas y los desplazamientos por medio de la matriz de rigidez de la estructura:

$$\{ F \} = | K | \{ \delta \} \quad (4)$$

Cada nodo tendrá una fuerza (o una componente de fuerza) y un correspondiente desplazamiento y los pasos necesarios para la formulación del método son los siguientes.

- 1.- Identificar y numerar los elementos constituyentes de las estructuras y las interconexiones entre estos que son los nodos.
- 2.- Identificar y numerar en cada elemento los nodos: uno para cada una de las componentes de las fuerzas y correspondientemente de los desplazamientos que pueden transmitirse de un elemento al otro.
- 3.- Calcular y escribir la matriz de rigidez de cada elemento.
- 4.- Ensamblar la matriz de rigidez de la estructura mediante la superposición adecuada de las matrices de rigidez de los elementos.
- 5.- Introducir en la ecuación matricial (4), los valores conocidos de fuerzas y desplazamientos (condiciones de contorno) y calcu-

lar los desplazamientos y las reacciones incógnitas.

- 6.- Encontrar las fuerzas internas en los nodos de los elementos $\{ F \}$, usando la relación fuerza - desplazamiento para cada elemento "e".
- 7.- Encontrar los esfuerzos internos en los elementos $\{ \sigma \}$, mediante la ley constitutiva (3) una vez determinadas las deformaciones $\{ \epsilon \}$ a través de la relación deformaciones - desplazamientos para cada elemento "e".

$$(*) \quad \{ \epsilon \}^e = | B | \{ \delta \}^e \quad ; \quad \{ \sigma \}^e = | D | | B | \{ \delta \}^e \quad (5)$$

Además a complemento de la descripción del método hay que recordar la necesidad y conveniencia de usar:

- 1.- Un sistema de coordenadas locales con respecto al cual se calcula rigidez de cada elemento.
- 2.- Un sistema de coordenadas globales común con respecto al cual se deben escribir todas las rigideces de los elementos antes del ensamblaje.
- 3.- Un sistema simple de transformación entre los dos sistemas de ejes de referencia.

(*) Para la definición de $| B |$ ver más adelante.

2.3.- EJEMPLIFICACION

Para presentar una ejemplificación general de los conceptos de análisis estructural y respectiva formulación matricial arriba introducidos, se considera un ejemplo mecánico estructural del tipo de elasticidad lineal.

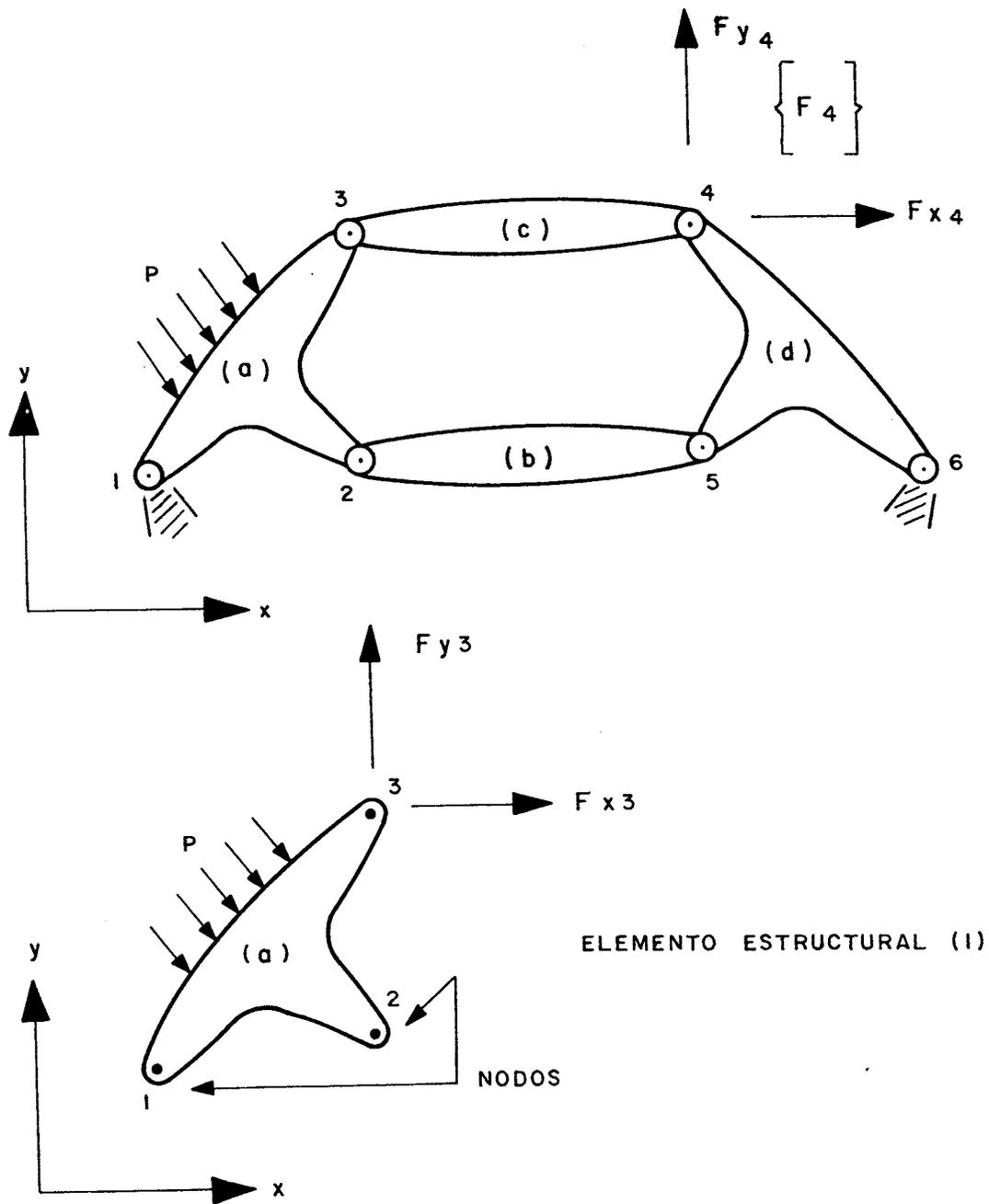
Sea la figura 5 una estructura plana formada por distintos elementos enlazados entre sí en los nodos, numerados del 1 al n. Los enlaces en los nodos son, en este caso, articulaciones de manera que no transmiten momentos.

Para empezar se supondrá que mediante cálculos efectuados aparte o mediante resultados experimentales, se conocen exactamente las propiedades de cada elemento. Así pues, si se examina un elemento representativo como el (a) asociado a los nodos 1, 2 y 3, las fuerzas que actúan en los nodos están unívocamente definidas por los desplazamientos de tales nodos, la carga distribuída que actúa sobre el elemento (p) y su eventual deformación inicial.

Las fuerzas y los correspondientes desplazamientos se definen mediante las componentes apropiadas (F_x , F_y , u , v) en un sistema corriente de coordenadas.

Se expresan en forma matricial las fuerzas que actúan en todos los nodos (3 en este caso) del elemento (1):

$$\{ F \}^1 = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \end{Bmatrix} \quad \text{con} \quad F_1^1 = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \end{Bmatrix} \quad (6)$$



ESTRUCTURA CARACTERISTICA CONSTITUIDA POR CUATRO ELEMENTOS INTERCONECTADOS

FIG. 5

y los correspondientes desplazamientos nodales:

$$\{ \delta \}^1 = \begin{Bmatrix} \delta_1^1 \\ \delta_2^1 \\ \delta_3^1 \end{Bmatrix} \quad \text{con} \quad \delta_1^1 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Suponiendo que el elemento presenta un comportamiento elástico lineal, la relación característica será siempre de la forma:

$$\{ F \}^1 = [K]^1 \{ \delta \}^1 + \{ F_p \}^1 + \{ F_{\epsilon_0} \}^1 \quad (8)$$

en donde $\{ F_p \}^1$ representa las fuerzas nodales necesarias para equilibrar cualquier carga distribuída que actúe sobre el elemento, y $\{ F_{\epsilon_0} \}^1$ las fuerzas nodales necesarias para equilibrar cualquier deformación inicial como la que puede ocasionar un cambio de temperatura si los nodos tienen impedido todo desplazamiento. El primer término representa las fuerzas inducidas por los desplazamientos de los nodos.

Similarmente, mediante un análisis o experimento preliminar se pueden definir unívocamente las tensiones o reacciones internas en cualquier punto o puntos especificados del elemento, en función de los desplazamientos de los nodos. Definiendo estas tensiones mediante la matriz $\{ \sigma \}$ se obtiene una relación de la forma:

$$\{ \sigma \}^1 = [S]^1 \{ \delta \}^1 + \{ \sigma_p \}^1 + \{ \sigma_{\epsilon_0} \}^1 \quad (9)$$

$$\text{con } [S]^1 = [D]^1 [B]^1 \quad (10)$$

donde los dos últimos términos son simplemente las tensiones originadas por las cargas distribuídas que actúan sobre el elemento y por tensiones iniciales cuando se restringe el desplazamiento en dos nodos.

La matriz K^e se conoce como matriz de rigidez del elemento y la matriz S^e como matriz de tensiones del elemento (e).

Se han ilustrado las relaciones utilizando el ejemplo de un elemento de tres nodos y puntos de interconexión capaces de transmitir sólo dos componentes de fuerza. Obviamente, los mismo argumentos y las mismas definiciones se pueden aplicar con toda generalidad. Un elemento como el (b) de una estructura hipotética tendrá sólo dos puntos de interconexión, otros pueden tener un número muy superior. Análogamente, si los puntos de enlace se consideran rígidos han de tenerse en cuenta tres componentes de fuerzas generalizadas y tres componentes de desplazamientos generalizados, correspondiendo el tercero de ellos a un momento y a una rotación respectivamente. Para una estructura tridimensional rígidamente articulada, el número de componentes por nodo será de seis.

Así pues, en general:

$$\{ F^e \} = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ \vdots \\ F_m^e \end{Bmatrix} \quad \{ \delta^e \} = \begin{Bmatrix} \delta_1^e \\ \delta_2^e \\ \vdots \\ \delta_m^e \end{Bmatrix} \quad (11)$$

poseyendo cada F_i^e y δ_i^e el mismo número de componentes o grados de libertad, siendo 'm' el número de nodos reales del elemento.

Las matrices de rigidez de los elementos serán, por tanto, siempre cuadradas y de la forma:

$$K^e = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e & \dots & K_{im}^e \\ \vdots & & & \vdots \\ K_{mi}^e & \dots & \dots & K_{mm}^e \end{bmatrix} \quad (12)$$

donde K_{ij}^e son submatrices también cuadradas de dimensiones $(m \times n)$, donde n es el número de componentes de fuerza a considerar en los nodos. Para obtener la solución completa de la estructura considerada en su conjunto se han de satisfacer, en toda ella, las dos condiciones de:

- a) compatibilidad de los desplazamientos, y
- b) equilibrio de fuerzas.

Todos los sistemas de desplazamientos nodales $\{ \delta \}$

$$\{ \delta \} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix} \quad (13)$$

representan ahora a la totalidad de la estructura y donde participan todos los elementos de la misma, satisfacen automáticamente la primera condición.

Como las condiciones generales de equilibrio ya son satisfechas dentro de cada elemento, sólo queda por establecer las condiciones de equilibrio en los nodos de la estructura. Las ecuaciones que resulten contendrán los desplazamientos como incógnitas y una vez calculados éstos el problema quedará completamente resuelto. Las fuerzas internas, o tensiones, que actúan dentro de cada elemento pueden hallarse fácilmente utilizando las características establecidas a priori para cada elemento por las ecuaciones (8 y 9).

Se considera la estructura sometida a un sistema de fuerzas externas "R" aplicadas en los nodos.

$$\{ R \} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{Bmatrix} \quad (14)$$

además de las cargas distribuídas aplicadas a cada elemento individual. Como antes, cada una de las fuerzas R_i deberá tener el mismo número de componentes que las reacciones consideradas en cada elemento. En el ejemplo en cuestión

$$R_i = \begin{Bmatrix} R_{xi} \\ R_{yi} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

ya que se ha supuesto que las uniones son articulaciones, pero ahora, a efectos de generalidad, el número de componentes es arbitrario. (n).

Estableciendo ahora el equilibrio en un nodo cualquiera "i", cada componente de R_i tiene que ser igual, a su vez, a la suma de las componentes de las fuerzas que aportan los elementos que reúnen en dicho nodo. Así pues, considerando todas estas componentes:

$$R_i = \sum_{e=1}^m \{F_i^e\} = \{F_i^1\} + \{F_i^2\} + \dots \dots \dots \{F_i^m\} \quad (16)$$

en donde F_i^1 es la fuerza que el elemento 1 aporta al nodo "i", F_i^2 la fuerza que aporta el elemento 2, etc. Claramente, sólo los elementos que contengan al punto "i" contribuirán con fuerzas no nulas, pero para mayor claridad se han incluido todos los elementos en la sumatoria.

Al sustituír las fuerzas aportadas al nodo "i", definidas en (16) por sus expresiones dadas por la definición (8) resulta que las variables nodales $\{\delta_i\}$ son comunes y por ello, omitiendo el supraíndice (e) se tendrá:

$$\{R\} = \left(\sum_{e=1}^m [K_{i1}^e] \right) \{\delta_1\} + \left(\sum_{e=1}^m [K_{i2}^e] \right) \{\delta_2\} + \dots \dots \dots \{F_{pe_0 i}\} \quad (17)$$

donde:

$$\{ F_{p \in \epsilon_0} \}^e = \{ F_p \}^e + \{ F_{\epsilon_0} \}^e \quad (18)$$

Como antes, la sumatoria sólo afecta a los elementos que contienen al nodo "i". Reuniendo todas esas ecuaciones se obtiene simplemente:

$$[K] \{ \delta \} = \{ R \} - \{ F_{p \in \epsilon_0} \} \quad (19)$$

donde las submatrices son

$$K_{im} = \sum_{e=1}^m K_{im}^e \quad (20)$$

$$\{ F_{p \in \epsilon_0 i} \} = \sum_{e=1}^m \{ F_{p \in \epsilon_0 i} \}^e$$

con sumatorias que comprenden a todos los elementos. Esta regla tan sencilla para ensamblar los elementos es muy útil, pues tan pronto como se conozca un coeficiente para un elemento particular, se puede almacenar inmediatamente en la "posición" adecuada del computador.

Si se utilizan diferentes tipos de elementos estructurales y éstos han de acoplarse, se ha de recordar que las reglas para la suma de matrices sólo permiten ésta, si las matrices son de idénticas dimensiones. Por consiguiente, las submatrices individuales que hayan de ensamblarse, deben formarse con el mismo número de componentes de fuerzas i y de desplazamientos. Así, por ejemplo, si un miembro capaz de transmitir momentos a un nodo tiene que unirse en ese nodo a otro miembro que esté articulado, es necesario completar la matriz de rigidez de este último, insertando convenientemente ceros en las posiciones correspondientes a las rotaciones y en las de los momentos.

El sistema de ecuaciones que resulta de (19) puede resolverse una vez

sustituídos los desplazamientos impuestos en los apoyos. En el ejemplo de la figura 5 donde son nulas ambas componentes de los desplazamientos de los nodos 1 y 6, habría que sustituir

$$\{ \delta_1 \} = \{ \delta_6 \} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

lo que equivale a reducir el número de ecuaciones de equilibrio (en este caso doce) anulando las dos primeras y las dos últimas, y reduciéndose así el número total de incógnitas a ocho. Es conveniente, sin embargo, ensamblar las ecuaciones de la forma expresada en la (19) para incluir todos los nodos.

Es obvio que sin sustituir un número mínimo de desplazamientos, obligados para impedir que la estructura se mueva como un sólido rígido, sería imposible resolver el sistema pues los desplazamientos no pueden quedar unívocamente determinados por las fuerzas y habría infinitas soluciones para un sistema de fuerzas dado. Este hecho, físicamente evidente, debe interpretarse matemáticamente en razón de que la matriz K , al ser singular, carece de inversa. Estableciendo los desplazamientos adecuados en la fase del ensamblaje, podrá obtenerse una solución única prescindiendo de las filas y las columnas adecuadas de las distintas matrices.

La forma del sistema de ecuaciones una vez ensambladas, es como sigue:

$$\begin{aligned} K_{11} \delta_1 + K_{12} \delta_2 + \dots + \{ R_1 \} - \{ F_{p \in 01} \} \\ K_{12} \delta_1 + K_{22} \delta_2 + \dots = \{ R_2 \} - \{ F_{p \in 02} \} \\ \text{etc.} \end{aligned} \quad (22)$$

Se apreciará que si se impone un desplazamiento cualquiera, tal como $\delta_1 = \bar{\delta}_1$ la "fuerza" exterior R_1 no puede ser impuesta y permanecerá como incógnita. Se puede, pues, prescindir de la primera

ecuación y sustituir δ_1 por un valor conocido en las restantes ecuaciones. Este procedimiento implica un proceso de cálculo engorroso, pudiéndose alcanzar el mismo objetivo añadiendo al coeficiente K_{11} un número grande αI y reemplazando el segundo miembro de la ecuación, $R_1 - F_1$ por $\bar{\delta}_1 \alpha$. Si α es mucho mayor que cualquier otro coeficiente de rigidez, esta alteración equivale a reemplazar la primera ecuación por

$$\alpha \delta_1 = \alpha \bar{\delta}_1 \quad (23)$$

es decir, la condición necesaria impuesta, pero se conserva la simetría del sistema y sólo se necesitan unos cambios mínimos en el orden de cálculo. De haber más desplazamientos impuestos, se seguirá el mismo procedimiento.

Una vez introducidas todas las condiciones de contorno se puede resolver el sistema de ecuaciones y obtener los desplazamientos incógnitos junto con las tensiones y fuerzas internas de cada elemento.

2.4.- EJEMPLOS

Antes de pasar al próximo capítulo en que se tratarán las bases fundamentales del MEF y se ilustrarán sus vinculaciones inmediatas con el método de los desplazamientos del análisis estructural en forma matricial, es quizá útil una más clara ejemplificación de los conceptos introducidos, sirviéndose de tres ejemplos extremadamente simples en los que se resuelve una estructura, construída por solamente uno y dos elementos lineales, mediante el método de los desplazamientos en forma matricial considerando detalladamente todas las fases que llevan a dicha resolución.

Como primer ejemplo, se puede considerar la barra articulada plana de sección uniforme A y módulo de elasticidad E que se representa en la figura 6. La barra está sometida a una carga lateral uniforme p y a una deformación uniforme debida a la temperatura.

$$\epsilon_0 = k T$$

Si los extremos de la barra están definidos por las coordenadas x_i e y_i y x_n e y_n , su longitud puede calcularse mediante la fórmula

$$L = \sqrt{\{(X_n - X_i)^2 + (Y_n - Y_i)^2\}}$$

y su ángulo de inclinación respecto a la horizontal por

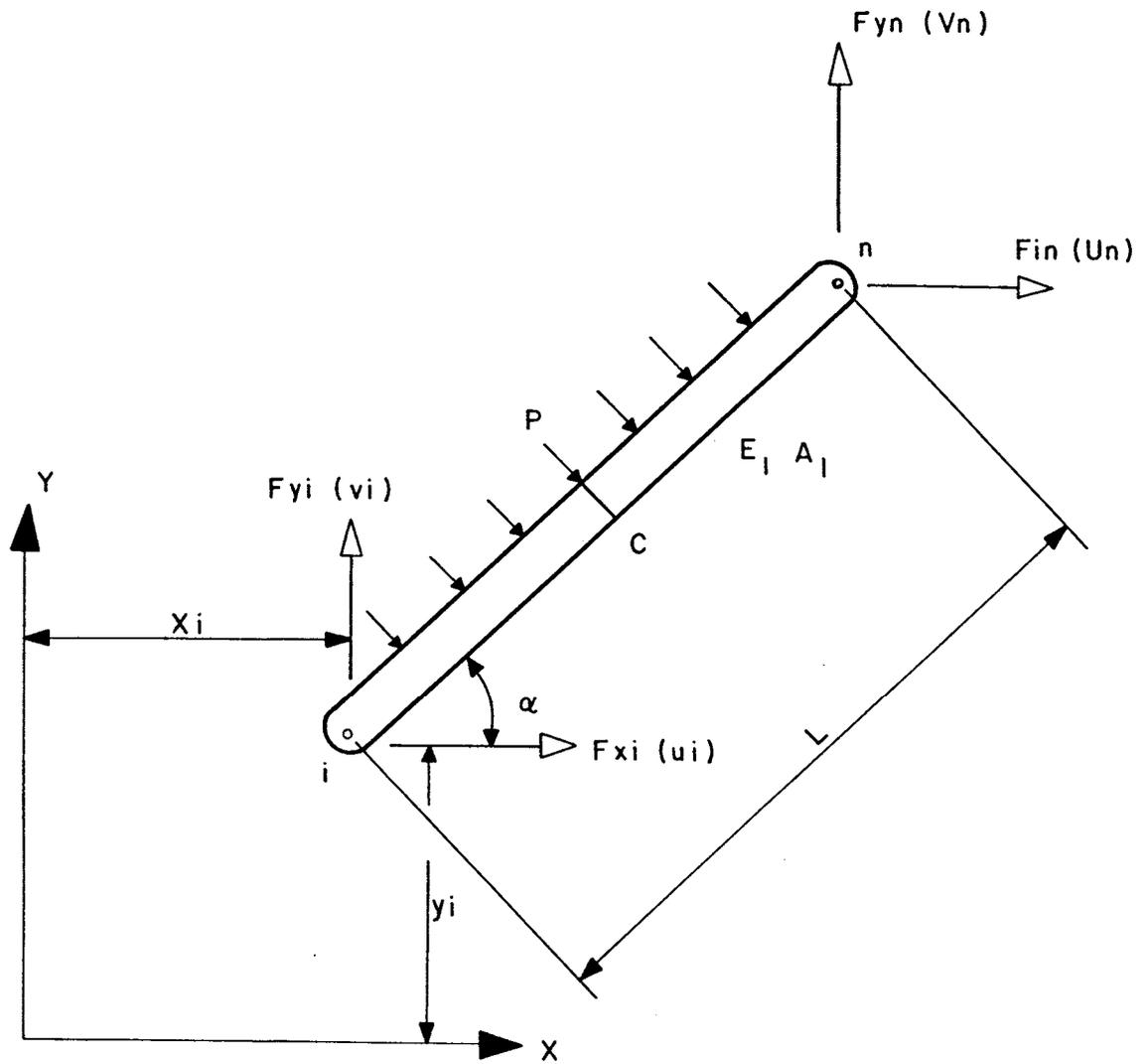
$$\alpha = \text{tg}^{-1} \left(\frac{Y_n - Y_i}{X_n - X_i} \right)$$

Solamente hay que considerar dos componentes de fuerzas y de desplazamientos en cada nodo.

Las fuerzas nodales debidas a la carga lateral son (ver 6 y 8)

$$\{ F_p \}^e = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xn} \\ F_{yn} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} - \text{sen } \alpha \\ \text{cos } \alpha \\ - \text{sen } \alpha \\ \text{cos } \alpha \end{Bmatrix} \cdot \frac{PL}{2}$$

y representan las componentes adecuadas de las reacciones de una viga simplemente apoyada $PL/2$. Similarmente, para impedir la expansión térmica ϵ^0 se necesita una fuerza axial ($EkTA$), lo que da una componente (ver 6 y 8):



BARRA ARTICULADA EN LOS EXTREMOS

FIG. 6

$$\{F_{\epsilon_0}\}^e = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xn} \\ F_{yn} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} - \cos \alpha \\ - \operatorname{sen} \alpha \\ \cos \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha \end{Bmatrix} \quad (\text{EkTA})$$

Finalmente, los desplazamientos del elemento (ver 7)

$$\{ \delta \}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix}$$

originarán un alargamiento $(u_n - u_i) \cos \alpha + (v_n - v_i) \operatorname{sen} \alpha$.

Al multiplicar éste por EA/L se obtiene la fuerza axial cuyas componentes pueden calcularse sustituyendo dicha fuerza en lugar de — EkTA en la ecuación anterior. Tras ordenar las ecuaciones se obtienen la expresión general (ver 4).

$$\begin{aligned} |K|^e \{ \delta \}^e &= \\ \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha, \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha, -\cos^2 \alpha, -\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha, \operatorname{sen}^2 \alpha, -\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha, -\operatorname{sen}^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha, -\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha, \cos^2 \alpha, \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha, -\operatorname{sen}^2 \alpha, \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha, \operatorname{sen}^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

o sea

$$\{ F \}^e = |K|^e \{ \delta \} + \{ F_p \}^e + \{ F_{\epsilon_0} \}^e$$

Así pues, se han obtenido las componentes de la ecuación general (8) para el caso elemental estudiado. Es, así mismo, muy sencillo

establecer las tensiones en cualquier sección del elemento en la forma establecida por la ecuación (9). Por ejemplo, si se considera la sección media C de la viga, puede demostrarse que las tensiones en la fibra extrema, calculadas a partir de la tensión axial del elemento y del momento flector, son:

$$\begin{aligned} \{ \sigma \}_C^e &= \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix}_C = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -\cos \alpha, & -\sin \alpha, & \cos \alpha, & \sin \alpha \\ -\cos \alpha, & -\sin \alpha, & \cos \alpha, & \sin \alpha \end{bmatrix} \{ \delta \}_C^e + \\ &+ \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \frac{P L^2}{8} \frac{d}{I} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} E K T \end{aligned}$$

donde "d" es el semiespesor de la sección e "I" su momento de inercia. Por tanto, todos los términos que aparecían en las ecuaciones 9 y 10 son ya fácilmente reconocibles.

$$\begin{aligned} \{ \sigma \}^1 &= \{ \sigma \}_C^e \\ | S | &= \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -\cos \alpha, & -\sin \alpha, & \cos \alpha, & \sin \alpha \\ -\cos \alpha, & -\sin \alpha, & \cos \alpha, & \sin \alpha \end{bmatrix} \\ \{ \delta \}^1 &= \{ \delta \}_C^e \\ \{ \sigma_p \}^1 &= \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \frac{P L^2}{8} \frac{d}{I} \\ \{ \epsilon_0 \}^1 &= - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} E K T \end{aligned}$$

Como segundo ejemplo se considera la estructura representada en la fig. 7 constituida por dos elementos (dos resortes en serie) cada uno de los cuales se caracteriza por su rigidez K_a y K_b .

Un extremo de la estructura está vinculado y en el segundo extremo está aplicada una carga "R" en dirección "y" coincidentes con el eje de la estructura misma.

En la resolución de esta estructura se pasará a través de todas las etapas que en el caso general forman el procedimiento de solución matricial mediante el método de los desplazamientos:

- Subdivisión y codificación de la estructura.
- Determinación de la rigidez de cada elemento.
- Ensamblaje de la rigidez de la estructura.
- Introducción de las condiciones de borde,
- Cálculo de las incógnitas.

a) Subdivisión y codificación de la estructura.

En la misma figura 7 está representado el modelo de la estructura en examen constituido por 2 elementos (a, b) y 3 nodos (1, 2, 3).

b) Determinación de la rigidez de cada elemento.

Siempre en la misma figura está representado un elemento que posee 2 nodos (i, j) en cada uno de los cuales, por hipótesis, pueden transmitirse solamente componentes de sollicitación en la dirección "y" axial del elemento mismo.

Para cada elemento pueden definirse el vector de las fuerzas y el de los desplazamientos.

$$\{ F \} = \begin{Bmatrix} F_{yi} \\ F_{yj} \end{Bmatrix} ; \quad \{ \delta \} = \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \end{Bmatrix}$$

en efecto en este caso para cada nodo hay una sola componente en la dirección 'y' por lo tanto se podrá en adelante omitir el subíndice 'y', entonces para el elemento (a)

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}_a = \begin{bmatrix} K_a & -K_a \\ -K_a & K_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \end{Bmatrix}_a$$

$(K_{jj})_a$

y para el elemento (b)

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_y \end{Bmatrix}_b = \begin{bmatrix} K_b & -K_b \\ -K_b & K_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \end{Bmatrix}_b$$

$(K_{ii})_b$

en donde la matriz cuadrada define la matriz de rigidez de cada uno de los elementos suponiendo positivos los esfuerzos en la dirección positiva de la Y.

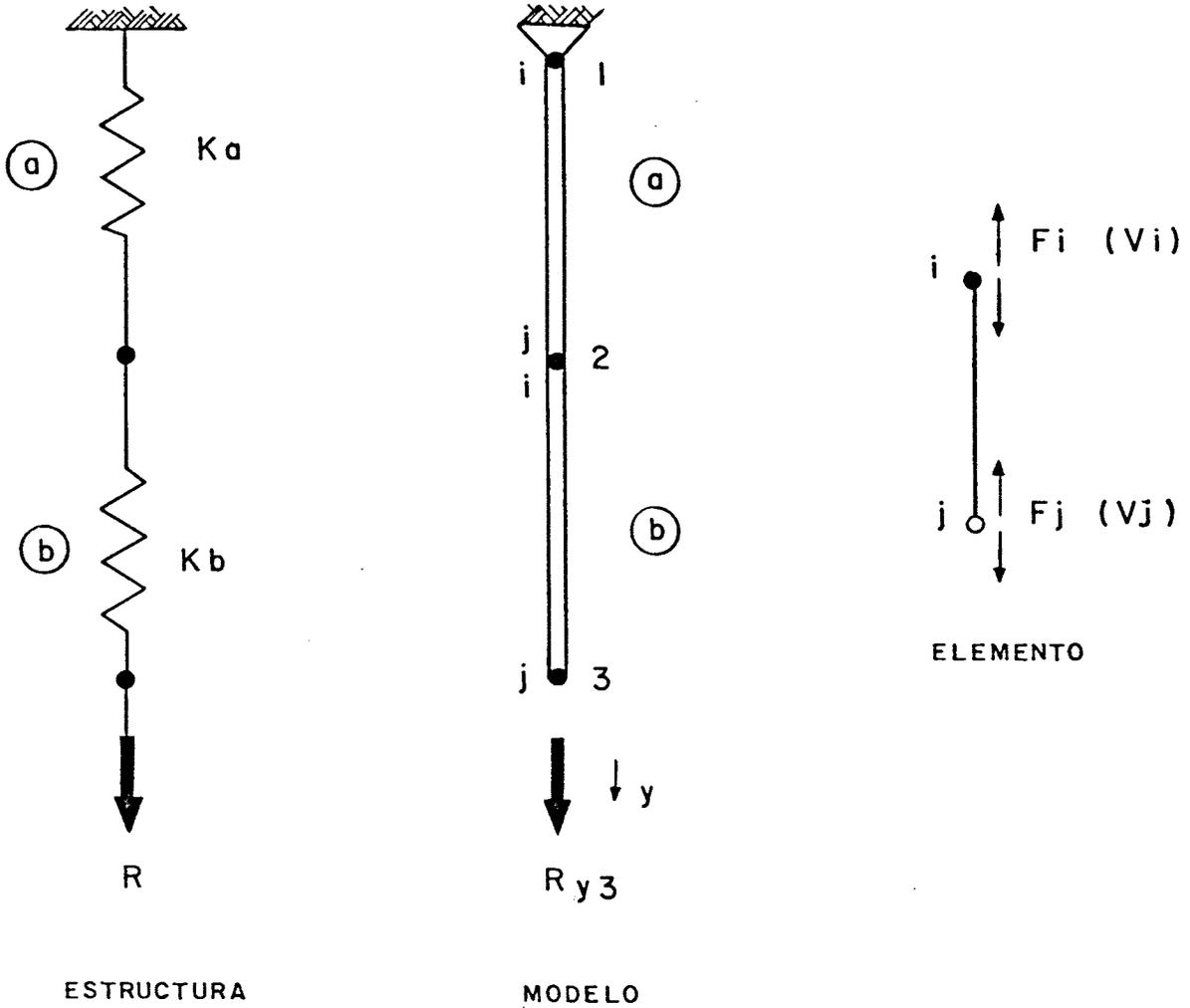
Para lo que se refiere a los componentes K_a y K_b que expresan la rigidez de los elementos, sus valores son función de forma y materiales constituyentes los elementos mismos.

Si por ejemplo se considera que los dos elementos sean barras de sección constante respectivamente A_a , A_b y de largo L_a , L_b y constituidas por materiales de módulo de elasticidad longitudinal E_a y E_b respectivamente se obtendrá que

$$K_a = \frac{A_a E_a}{L_a} \quad \text{y} \quad K_b = \frac{A_b E_b}{L_b}$$

c) Ensamblaje de la rigidez de la estructura.

La ecuación de equilibrio para la estructura completa es



ESTRUCTURA CONSTITUIDA POR DOS ELEMENTOS

FIG. 7

$$\{ R \} = | K | \{ \delta \}$$

que en este caso particular es

$$\begin{Bmatrix} R1 \\ R2 \\ R3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K11 & K12 & K13 \\ K21 & K22 & K23 \\ K31 & K32 & K33 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V1 \\ V2 \\ V3 \end{Bmatrix}$$

El término general K_{ij} de la matriz tiene un significado físico fácilmente individualizable: indica la fuerza en el nodo "i" por efecto de un desplazamiento unitario del nodo "j" mientras que todos los demás desplazamientos son nulos.

Se puede por lo tanto escribir para cada componente de la matriz de rigidez

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^n (K_{ij})_e$$

donde "n" es el número de los elementos que tienen en común el nodo "i" y el nodo "j" .

Por ejemplo, para el término K_{22} de la matriz de rigidez de la estructura en estudio

$$K_{22} = (K_{22})^a + (K_{22})^b = (K_{jj})^a + (k_{ii})^b = K_a + K_b$$

considerando que el nodo 2 de la estructura representa el nodo "j" para el elemento (a) y el nodo "i" para el elemento (b) según la numeración local adoptada. Queda claro además que en el ejemplo en consideración los términos K_{13} y K_{31} son nulos no existiendo elementos que tengan en común el nodo 1 y 3. Así mismo para los restantes términos existirá cada vez un sólo elemento que contendrá los nodos, " i " y " j " .

Finalmente se puede escribir la matriz de rigidez completa para la estructura y la ecuación de equilibrio global correspondiente.

$$\begin{Bmatrix} R1 \\ R2 \\ R3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_a & -K_a & 0 \\ -K_a & (K_a + K_b) & -K_b \\ 0 & -K_b & K_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V1 \\ V2 \\ V3 \end{Bmatrix}$$

d) Introducción de las condiciones de borde.

Se trata de introducir las fuerzas y los desplazamientos externos aplicados o impuestos sobre algunos puntos del contorno de la estructura. En este caso existe una fuerza externa (R_{y3}) aplicada al nodo 3 y una reacción incógnita en el nodo 1; así mismo un sólo vínculo de desplazamiento aplicado al nodo 1: $V1 = 0$.

$$\begin{Bmatrix} R1 \\ 0 \\ R_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_a & -K_a & 0 \\ -K_a & (K_a + K_b) & -K_b \\ 0 & -K_b & K_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ V2 \\ V3 \end{Bmatrix}$$

e) Cálculo de las incógnitas.

Se trata en este paso final de calcular los desplazamientos incógnitos ($V2$ y $V3$) y la reacción incógnita ($R1$).

Explicando la anterior ecuación de equilibrio

$$\begin{aligned} R1 &= -K_a V2 \\ 0 &= (K_a + K_b)V2 - K_b V3 \\ R_{y3} &= -K_b V2 + K_b V3 \end{aligned}$$

y resolviendo respecto a los desplazamientos (las dos últimas ecuaciones escritas son en dos incógnitas $V2$ y $V3$).

$$V2 = \frac{Ry3}{Ka}$$

$$V3 = \frac{Ka + Kb}{Ka Kb} \cdot Ry3$$

de la primera de las tres ecuaciones se obtiene la reacción incógnita

$$R1 = - Ry3$$

En otras palabras se ha procedido a invertir la matriz de rigidez global para obtener la ecuación

$$\{ \delta \} = [K]^{-1} \{ R \}$$

y después resolver el sistema para los desplazamientos $\{ \delta \}$.

Como paso ulterior hacia una solución completa de la estructura (cálculo de esfuerzos y deformaciones) se tratará en un caso general de encontrar para cada elemento las fuerzas internas aplicadas en los nodos respectivos mediante el uso de la ecuación de equilibrio de cada elemento $\{ F \}^e = [K]^e \{ \delta \}^e$.

Sucesivamente se pasa al cálculo de los esfuerzos que en este caso se obtienen simplemente dividiendo las fuerzas por la sección del elemento

$$\sigma a = \frac{R1}{Aa} \quad ; \quad \sigma b = \frac{Ry3}{Ab}$$

Finalmente las deformaciones serán:

$$\epsilon a = \frac{\sigma a}{Ea} \quad ; \quad \epsilon b = \frac{\sigma b}{Eb}$$

Los resultados obtenidos son obvios y naturalmente no hacía falta la aplicación de un procedimiento tan largo para su obtención. Sin embargo la misma metodología de resolución queda prácticamente invariada para estructura de cualquier forma compleja.

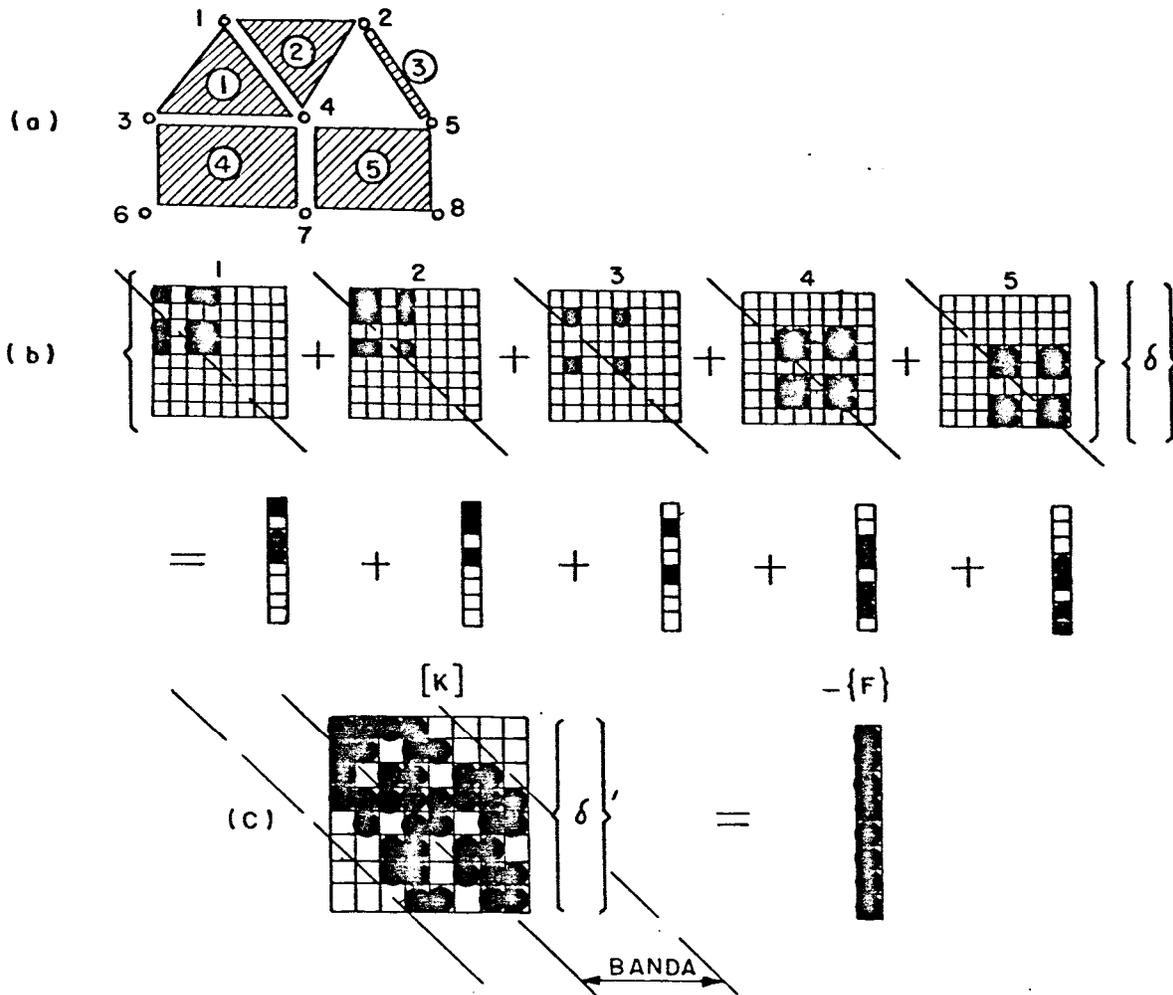
Como último ejemplo se presenta una estructura constituída por cinco elementos de formas diferentes a objeto de ilustrar, mediante una sugestiva representación gráfica (fig. 8), el proceso general de la solución matricial del método de los desplazamientos.

El primer paso para la solución, es determinar las propiedades de cada elemento a partir de la geometría del problema, de los datos de carga, y de la naturaleza del material. Se determina la matriz de rigidez para cada elemento, así como las correspondientes "cargas nodales" en la forma expresada por (8). Cada elemento tiene su propio número de identificación y sus conexiones nodales especificadas.

Por ejemplo:

elemento 1	nodos	1	3	4	
2		1	4	2	
3		2	5		
4		3	6	7	4
5		4	7	8	5

Suponiendo que las propiedades se hayan establecido en las mismas coordenadas, se puede alojar cada componente de "rigidez" o de "fuerza" en la matriz global como se muestra en la figura (b). Cada cuadrado sombreado representa un coeficiente individual, o una submatriz del tipo K_{ij} si se considera más de una cantidad en los nodos. En este caso, para cada elemento, se muestra su contribución individual y se puede comprobar la posición de los coeficientes. Adviértase que aunque se hayan considerado en este ejemplo "elementos" de varios tipos, no representa ninguna dificultad su especificación. (Todas las "fuerzas", incluyendo las nodales, se han asociado aquí



PROCESO DE ENSAMBLAJE DE LA RIGIDEZ GLOBAL

FIG. 8

con elementos por razones de simplificación).

El segundo paso es el ensamblaje de las ecuaciones finales del tipo de la (19). Esto se puede realizar simplemente siguiendo la regla dada en (20), es decir, mediante simple adición de todos los números en el lugar correspondiente de la matriz global. El resultado se muestra en la figura (c) donde se han sombreado los coeficientes no nulos.

Como las matrices son simétricas, en realidad solamente hay que calcular la mitad superior de la diagonal.

Todos los coeficientes no nulos están confinados dentro de una banda o contorno cuyo ancho puede calcularse a priori a partir de la posición de las conexiones nodales. Así, pues, en los problemas para computador, solamente es preciso almacenar los elementos que caen dentro de la mitad superior del ancho de la banda, como se muestra en la figura (c).

El tercer paso es introducir las condiciones de contorno en la matriz final ya ensamblada tal como se dijo anteriormente. A esto le sigue el paso final de resolución del sistema de ecuaciones resultantes. Para ello se pueden seguir muchos métodos y al paso final seguirá la sustitución para obtener tensiones, u otras cantidades de salida cuyo conocimiento se desee.

3.- EL M.E.F. COMO UNA EXTENSION DEL METODO MATRICIAL DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

3.1.- INTRODUCCION

En las páginas anteriores se ha ilustrado brevemente la manera de resolver una estructura cuando está constituida por un ensamblaje de elementos estructurales interconectados por un número discreto de puntos nodales.

Se ha visto la manera de estudiar la estructura, con el método denominado de los desplazamientos en su formulación matricial, una vez que se han conocido y definido las características de rigidez (relación fuerzas - desplazamientos nodales) para cada uno de los elementos estructurales.

En una estructura que en cambio sea continua, el verdadero número de puntos de interconexión es infinito; es esta en efecto la principal dificultad para la resolución del problema.

Es difícil por otro lado, ver a primera vista como pueden discretizarse problemas de este tipo en la forma descrita anteriormente.

El concepto de elementos finitos justamente supera esta dificultad mediante la suposición que el medio continuo real esté dividido en elementos ideales interconectados solamente en un número finito de puntos nodales sobre los cuales se supone actúen unas fuerzas ficticias, representativas de los esfuerzos realmente actuantes en forma distribuida sobre los contornos de los elementos.

Si una tal idealización, puede demostrarse ser aceptable, resulta claro como el problema puede reducirse al de una estructura convencional y luego pueda resolverse con la metodología ya expuesta. Es desde este punto de vista, que el M.E.F. puede considerarse como

una simple (o quizá no tan simple) extensión del método matricial de los desplazamientos.

Esquemáticamente el procedimiento puede describirse de la siguiente manera:

- a) El continuo se divide, mediante líneas o superficies imaginarias, en un número de "elementos finitos".
- b) Se supone que los elementos están conectados entre sí mediante un número discreto de puntos, que se llaman nodos, situados en sus contornos. Los desplazamientos de estos nodos serán las incógnitas fundamentales del problema, tal como ocurre en el análisis simple de estructuras.
- c) Se toma un conjunto de funciones que definan de manera única el campo de desplazamientos dentro de cada "elemento finito" en función de los desplazamientos nodales de dicho elemento.
- d) Estas funciones de desplazamientos definirán entonces de manera única el estado de deformación dentro del elemento en función de los desplazamientos nodales. Estas deformaciones junto con las deformaciones iniciales y las propiedades constitutivas del material, definirán el estado de tensiones en todo el elemento y, por consiguiente, también en sus contornos.
- e) Se determina un sistema de fuerzas concentradas en los nodos, tal que equilibre las tensiones en el contorno y cualesquiera cargas repartidas, resultando así una relación entre fuerzas y desplazamientos de la forma (8).

Una vez alcanzado este punto, el procedimiento para alcanzar la solución puede seguir el procedimiento general descrito con anterioridad.

Es evidente que se han introducido una serie de aproximaciones. En primer lugar, no siempre es fácil asegurar que las funciones de desplazamientos escogidas satisfagan las condiciones de continuidad de los desplazamientos entre elementos adyacentes. Por consiguiente, esta condición de compatibilidad, puede no cumplirse en el contorno de los elementos (aunque es evidente que dentro de cada elemento si se cumplirá, a causa de la unicidad de los desplazamientos implicada en el hecho de que los mismos estén representados por funciones continuas). En segundo lugar, al concentrar las fuerzas equivalentes en los nodos, las condiciones de equilibrio sólo se cumplirán para el conjunto del continuo.

Normalmente, ocurrirá que tales condiciones no se cumplirán en zonas localizadas dentro y en el contorno de cada elemento. Será misión del ingeniero escoger la forma de los elementos y de las funciones de desplazamiento para cada caso particular, debiendo usar de su ingenio y habilidad, dependiendo el grado de aproximación que se alcance del uso que haga de esas dos facultades.

Hasta aquí, el procedimiento descrito se justifica sólo intuitivamente, pero de hecho lo que se ha sugerido es equivalente a la minimización de la energía potencial total del sistema, siendo función ésta de un campo de desplazamientos impuestos. Si este campo de desplazamiento se define adecuadamente, deberá producirse convergencia hacia la solución correcta.

Los alcances de estas notas no permiten a este respecto, ir más allá que estas justificaciones intuitivas.

NOTA:

El contenido del párrafo que sigue está resumido y esquematizado en el flujograma que se anexa al final de este párrafo, al cual se envía para una consulta más rápida.

3.2.- CARACTERISTICAS DE UN ELEMENTO FINITO TRIANGULAR

Para ilustrar la derivación de las características para un elemento finito general, se prefiere para sencillez de presentación, derivar las características para un elemento plano de forma triangular lo que permitirá en todo caso tener una visión completa del procedimiento que resultará fácilmente extendible a elementos de formas superiores.

Se toma en consideración un ejemplo sencillo de una estructura plana constituida por una lámina delgada dividiéndose la región en elementos triangulares como se muestra en la figura 9.

Se pasarán en reseña los pasos principales de la formulación del método que son:

- la función de los desplazamientos
- la deformación y los esfuerzos
- la rigidez y las fuerzas nodales.

a) La función de los desplazamientos.

La figura 10 muestra el elemento triangular típico considerado, con los nodos i, j, m, numerados en sentido antihorario.

Los desplazamientos de un nodo tienen dos componentes

$$\delta_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (24)$$

y los seis componentes de los desplazamientos del elemento se agrupan en un vector

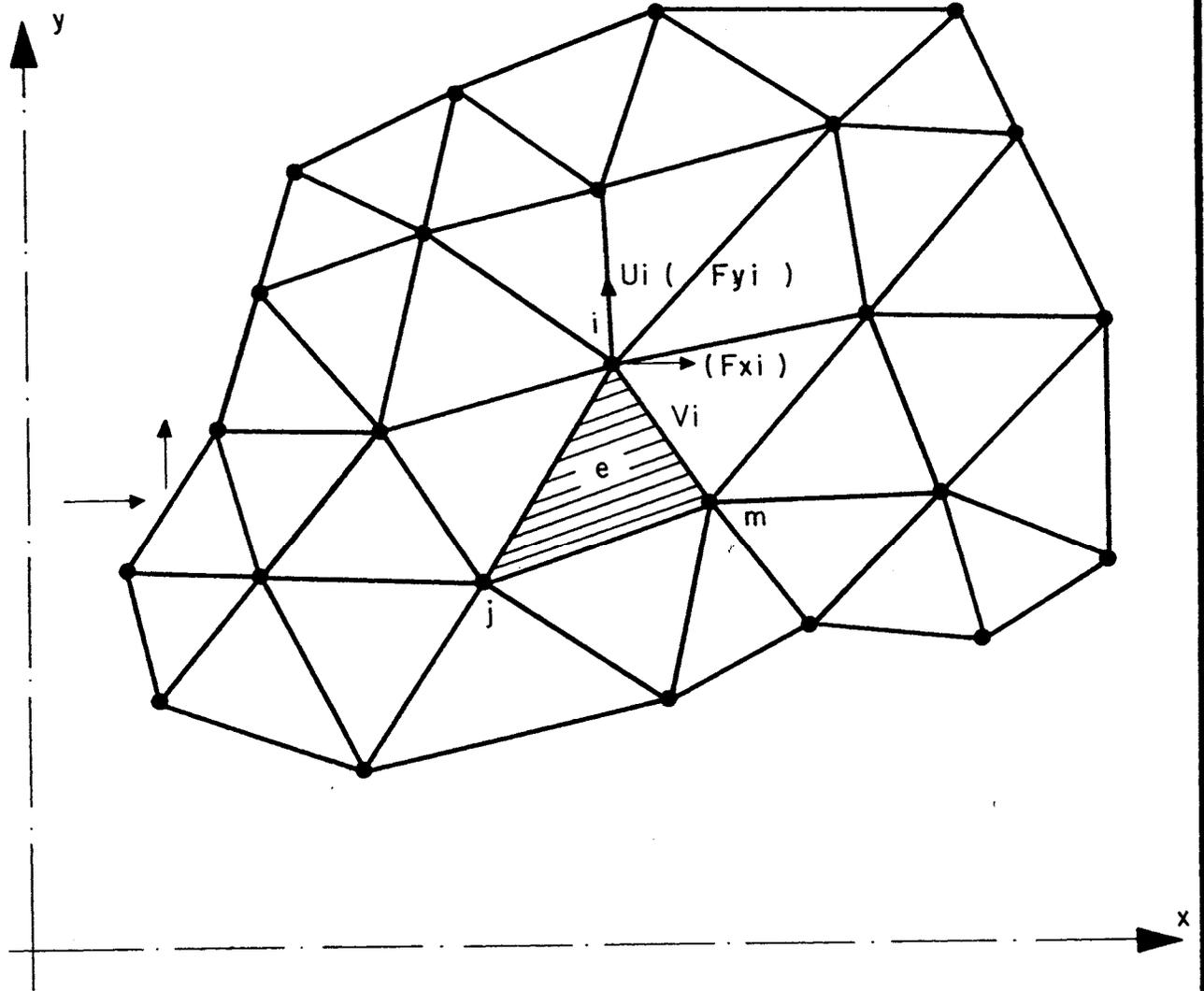
$$\{ \delta \}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Los desplazamientos interiores a un elemento han de quedar definidos unívocamente por esos seis valores. La representación más sencilla viene dada evidentemente por dos polinomios de primer grado.

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y, \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 X + \alpha_6 Y \end{aligned} \quad (26)$$

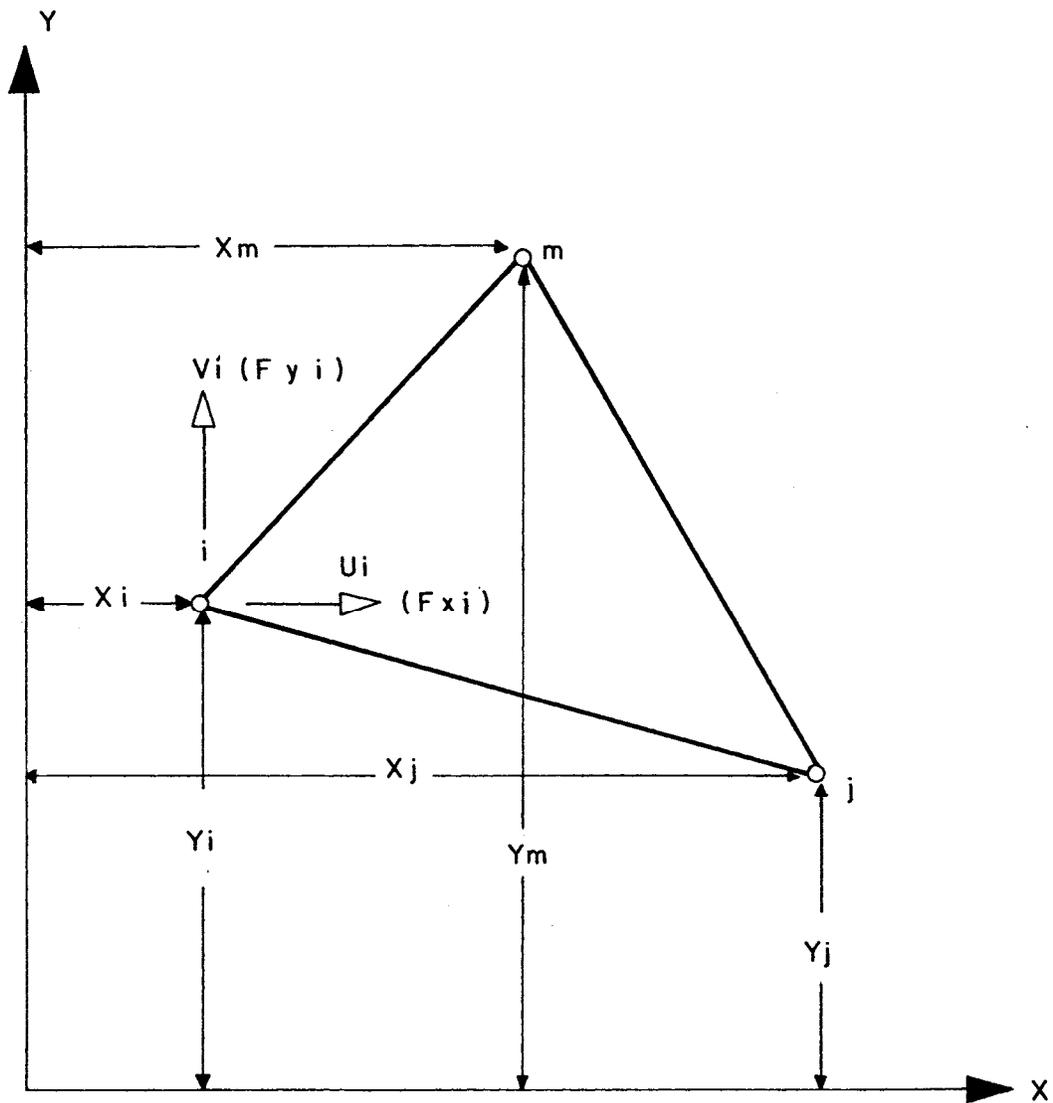
Se pueden calcular fácilmente las seis componentes α resolviendo los dos sistemas de tres ecuaciones simultáneas que se obtienen al sustituir las coordenadas de los nodos e igualar las expresiones resultantes a los desplazamientos correspondientes a los nodos. Escribiendo por ejemplo,

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 X_m + \alpha_3 Y_m \end{aligned} \quad (27)$$



REGION ESTRUCTURAL DIVIDIDA EN ELEMENTOS FINITOS

FIG. 9



ELEMENTO FINITO TRIANGULAR

FIG. 10

Se puede calcular fácilmente α_1 , α_2 , y α_3 en función de los desplazamientos nodales u_i , u_j y u_m para obtener finalmente

$$u = \frac{1}{2A} \{ (a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_m + b_m x + c_m y) u_m \} \quad (28)$$

donde

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\ b_i &= y_j - y_m = y_{jm} \\ c_i &= x_m - x_j = x_{mj} \end{aligned} \quad (29)$$

obteniéndose los otros coeficientes mediante permutación cíclica de los subíndices i, j, m y donde

$$2A = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2 \text{ (área del triángulo } ijm) \quad (30)$$

Puesto que las ecuaciones para el desplazamiento vertical son similares, se obtiene igualmente que

$$v = \frac{1}{2A} \{ (a_i + b_i x + c_i y) v_i + (a_j + b_j x + c_j y) v_j + (a_m + b_m x + c_m y) v_m \} \quad (31)$$

En términos matriciales puede escribirse

$$\{ U \}^e = \{ \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \}^e = [N] \{ \delta \}^e \quad (32)$$

siendo $[N]$ la matriz de función de desplazamiento, esta así como ha sido elegida en este caso, garantiza automáticamente la continuidad de desplazamientos entre elementos adyacentes al imponer los mismos desplazamientos en los nodos para dos elementos contiguos.

b) La deformación y los esfuerzos.

La deformación total en cualquier punto del elemento puede definirse mediante sus tres componentes que contribuyen al trabajo interno:

$$\{ \epsilon \} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & , & 0 \\ 0 & , & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} & , & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [L] \{ U \} \quad (33)$$

Sustituyendo en esta la ecuación 32 se obtiene

$$\{ \epsilon \} = [L] [N] \{ \delta \} = [B] \{ \delta \} \quad (34)$$

siendo $[B]$ la matriz de deformaciones dada por

$$[B] = [L] [N] = \begin{bmatrix} \frac{\delta N}{\delta x} & , & 0 \\ 0 & , & \frac{\delta N}{\delta y} \\ \frac{\delta N}{\delta y} & , & \frac{\delta N}{\delta x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b & , & 0 \\ 0 & , & c \\ c & , & b \end{bmatrix} \quad (35)$$

de lo cual puede observarse como la $[B]$ sea independiente de la posición del punto dentro del elemento y por consiguiente las deformaciones con constantes en todo el mismo.

A través de la ley constitutiva $\{ \sigma \} = [D] \{ \epsilon \}$ es en este punto fácil de calcular la matriz de esfuerzos sustituyendo la ecuación encontrada para la $\{ \epsilon \}$ obteniéndose:

$$\{ \sigma \} = [D] [B] \{ \delta \} = [S] \{ \delta \} \quad (36)$$

siendo $[S]$ la matriz de esfuerzos.

c) La rigidez y las fuerzas nodales.

El siguiente paso es el de la búsqueda de la relación entre desplazamientos y fuerzas nodales, o sea de la rigidez del elemento.

Lo antes ilustrado demuestra que la condición que los desplazamientos en todos los puntos del elemento sean función líneal de las coordenadas, ha elevado a deformaciones compatibles y esfuerzos en equilibrio.

Para calcular la rigidez y así definir las fuerzas ficticias nodales $\{ F \}$ que satisfagan a las condiciones de equilibrio, se determina el trabajo externo realizado por estas fuerzas equivalentes que en forma matricial se expresa:

$$L_E = \frac{1}{2} \{ \delta \}^T \{ F \} \quad (37)$$

La energía total de deformación del elemento vale:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \{ \epsilon \}^T \{ \sigma \} dV \quad (38)$$

siendo V el volúmen del elemento.

Ahora bien en base a la relación 34 se puede escribir

$$\{ \epsilon \}^T = \{ \delta \}^T [B]^T \quad (39)$$

y sustituyendo esta y la 36 en la ecuación (38)

$$W = \frac{1}{2} \int_V \{ \delta \}^T [B]^T [D] [B] \{ \delta \} d V \quad (40)$$

Igualando el trabajo externo de la ecuación 37 con la energía total de deformación de la ecuación 40, se obtiene la ecuación de equilibrio.

$$\{ \delta \}^T \{ F \} = \{ \delta \}^T \int_V [B]^T [D] [B] \{ \delta \} d V \quad (41)$$

$$\{ F \}^e = [K]^e \{ \delta \}^e \quad (42)$$

con

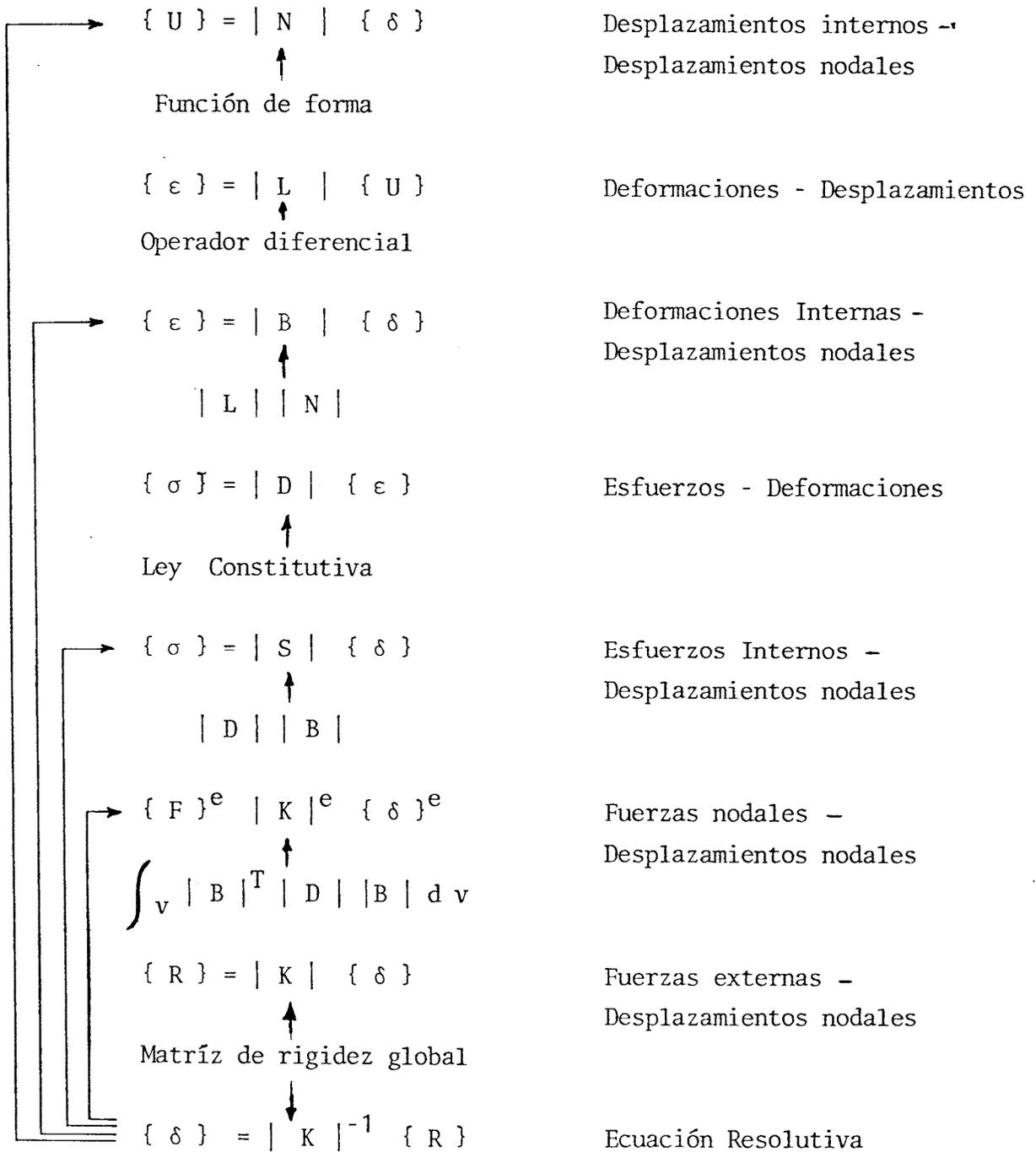
$$[K]^e = \int_V [B]^T [D] [B] d V \quad (43)$$

que es la matriz de rigidez del elemento que pone en relación los desplazamientos nodales con las fuerzas internas en los nodos.

Puede además observarse que $[B]$ y $[D]$ son independientes de las coordenadas y salir de la integral hasta obtener

$$[K]^e = [B]^T [D] [B] \quad t A \quad (44)$$

siendo " t " el espesor del elemento y " A " su área.



FORMULAS PRINCIPALES DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS .

4. ESTRUCTURAS PLANAS EN CAMPO ELASTICO LINEAL

4.1. INTRODUCCION

El método de los elementos finitos obtuvo sus primeros éxitos en su aplicación a problemas bidimensionales. En el capítulo 3, ya se han empleado problemas de ese tipo para aclarar las bases de la formulación por elementos y para deducir las relaciones generales referidas al caso del elemento triangular, que es el más sencillo, aunque el procedimiento es totalmente general, debido a que el mismo problema se puede analizar utilizando elementos más elaborados, que se introducen de idéntica forma.

En ambos problemas de tensión y deformación plana, el campo de desplazamientos viene expresado unívocamente en función de los desplazamientos u y v en las direcciones de los ejes cartesianos ortogonales x e y respectivamente.

Además, las únicas tensiones y deformaciones que se han de considerar en ambos casos, son las tres componentes en el plano $x - y$. En el caso de tensión plana, las tres componentes de la tensión son nulas por definición y por consiguiente no contribuyen al trabajo interno. En la deformación plana, la tensión en la dirección perpendicular al plano $x - y$ no es nula. Sin embargo, la deformación en dicha dirección es nula por definición, y por consiguiente dicha tensión no contribuye al trabajo interno, pero si se desea puede evaluarse al final del cálculo a partir de las tres componentes principales de la tensión.

Se trataría entonces únicamente de explicitar la matriz $| D |$ constitutiva del material elástico lineal, mientras que todo lo demás queda igual a lo expuesto antes.

4.2. MATRIZ DE ELASTICIDAD

La matriz $[D]$ de la relación (44) expresa la ley constitutiva del material:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (45)$$

se puede establecer explícitamente para cualquier material y en el caso de estructuras planas pueden tomarse en cuenta los casos siguientes:

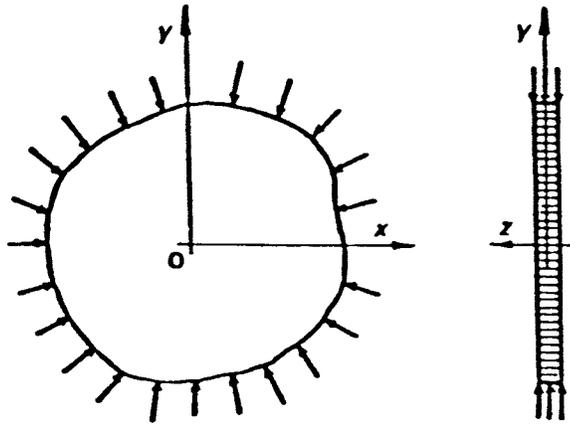
* Tensión plana en un material isótropo (fig. 11 a). Para los estudios de tensión plana en los materiales isótropos, por definición, se tiene:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \sigma_x/E - \nu\sigma_y/E \\ \epsilon_y &= -\nu\sigma_x/E + \sigma_y/E \\ \gamma_{xy} &= 2(1 + \nu) \tau_{xy}/E \end{aligned} \quad (45)$$

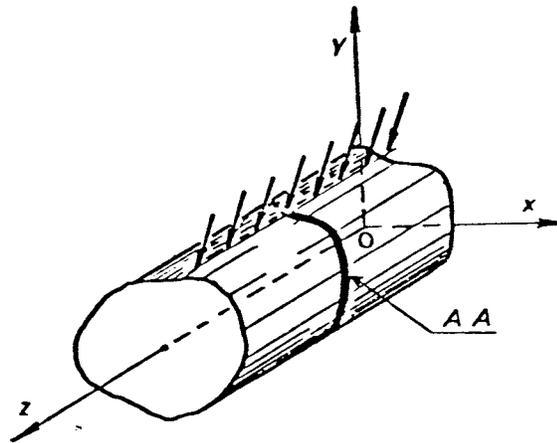
Despejando las tensiones en el sistema anterior, obtenemos la matriz $[D]$.

$$[D] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ \nu & 1 & \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix}$$

en el cual E es el módulo de elasticidad y ν el coeficiente de Poisson.



A) ESTRUCTURA EN ESFUERZO PLANO



b) ESTRUCTURA EN DEFORMACION PLANA

* Deformación plana de un material isótropo. En este caso, la tensión normal σ_z no es nula, debiendo de añadirse a las otras tres componentes de la tensión. Por definición se tiene (ver fig. 11b).

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \sigma_x/E - \nu\sigma_y/E - \nu\sigma_z/E \\ \epsilon_y &= -\nu\sigma_x/E + \sigma_y/E - \nu\sigma_z/E \\ \gamma_{xy} &= 2(1 + \nu) \tau_{xy}/E\end{aligned}\tag{47}$$

pero además,

$$\epsilon_z = 0 = -\nu\sigma_x/E - \nu\sigma_y/E + \sigma_z/E$$

Eliminando σ_z y despejando las tres tensiones restantes, la matriz $[D]$ resulta:

$$[D] = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1 - \nu) & 0 \\ \nu/(1 - \nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2(1 - \nu) \end{bmatrix}\tag{48}$$

* Materiales anisótropos. Para materiales totalmente anisótropos se necesitan 21 constantes elásticas independientes para definir completamente las relaciones entre tensiones y deformaciones en tres dimensiones.

Si ha de ser aplicable un análisis bidimensional, las propiedades del material deben presentar simetría, lo que implica que como máximo podrá haber seis constantes independientes en la matriz $|D|$. Por consiguiente, siempre se puede escribir:

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ & d_{22} & d_{23} \\ \text{(sim)} & & d_{23} \end{bmatrix} \quad (48)$$

Un caso de interés práctico especial es el del material "estratificado" o con isotropía transversal, cuyas propiedades presentan una simetría de revolución dentro del plano de cada estrato. Los materiales de este tipo tienen sólo cinco constantes elásticas in dependientes.

Las relaciones generales entre tensiones y deformaciones son en este caso, tomando un eje y perpendicular a los estratos, según la figura 12:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \sigma_x/E_1 - \nu_2 \sigma_y/E_2 - \nu_1 \sigma_z/E_1 \\ \epsilon_y &= -\nu_2 \sigma_x/E_2 + \sigma_y/E_2 - \nu_2 \sigma_z/E_1 \\ \epsilon_z &= -\nu_1 \sigma_x/E_1 - \nu_2 \sigma_y/E_2 + \sigma_z/E_1 \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_2} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_2} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (49)$$

donde las constantes E_1 y ν_1 (G_1 es dependiente) están asociadas al comportamiento en el plano de cada estrato, y E_2 , G_2 y ν_2 a una dirección normal a éste.

La matriz [D] se hace ahora

$$\frac{E_1}{E_2} = n \quad \text{y} \quad \frac{G^2}{E_2} = m$$

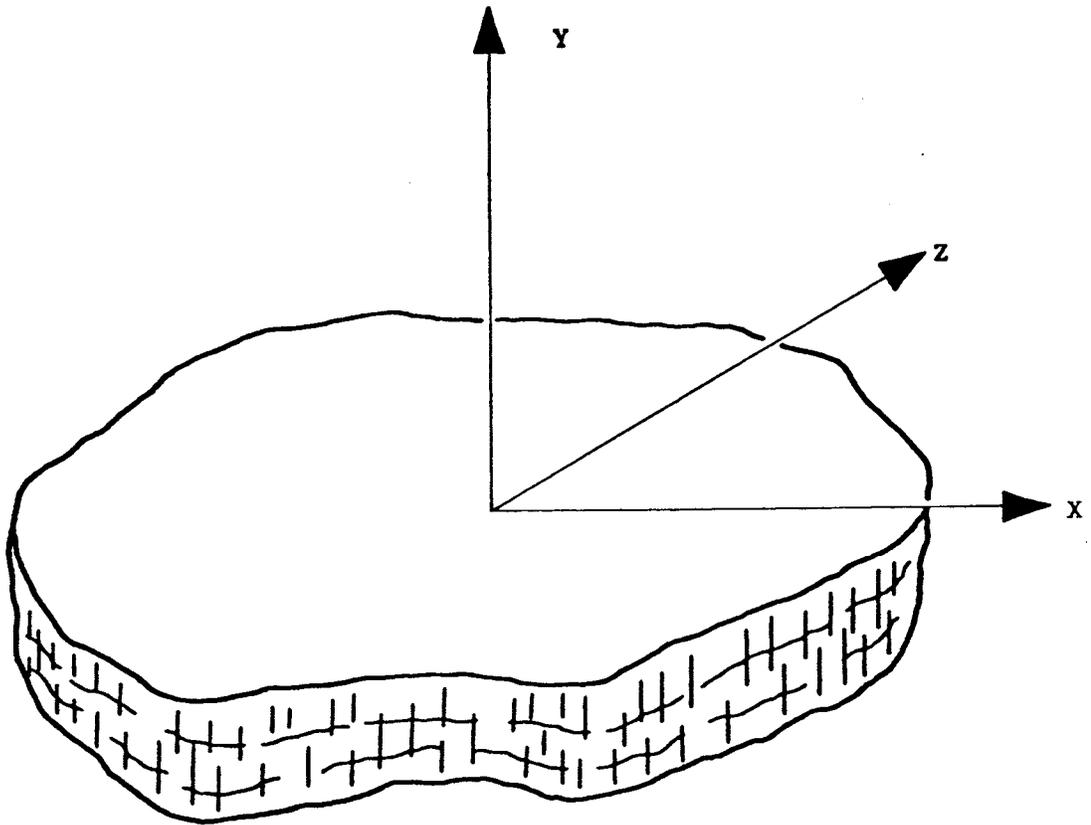
$$[D] = \frac{E_2}{(1 - n\nu_2^2)} \quad x \quad \begin{bmatrix} n & n\nu_2^2 & 0 \\ n\nu_2^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1 - n\nu_2^2) \end{bmatrix} \quad (50)$$

en el caso de tensión plana, o bien

$$[D] = \frac{E_2}{(1 + \nu_1)(1 - \nu_1 - 2n\nu_2^2)} \quad x$$

$$x \quad \begin{bmatrix} n(1 - n\nu_2^2) & n\nu_2^2(1 + \nu_1) & 0 \\ n\nu_2^2(1 + \nu_1) & (1 - \nu_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & m(1 + \nu_1)(1 - \nu_1 - 2n\nu_2^2) \end{bmatrix} \quad (51)$$

en el caso de deformación plana.



MATERIAL TRANSVERSALMENTE ISOTROPO (ESTRATIFICADO)

FIG. 12

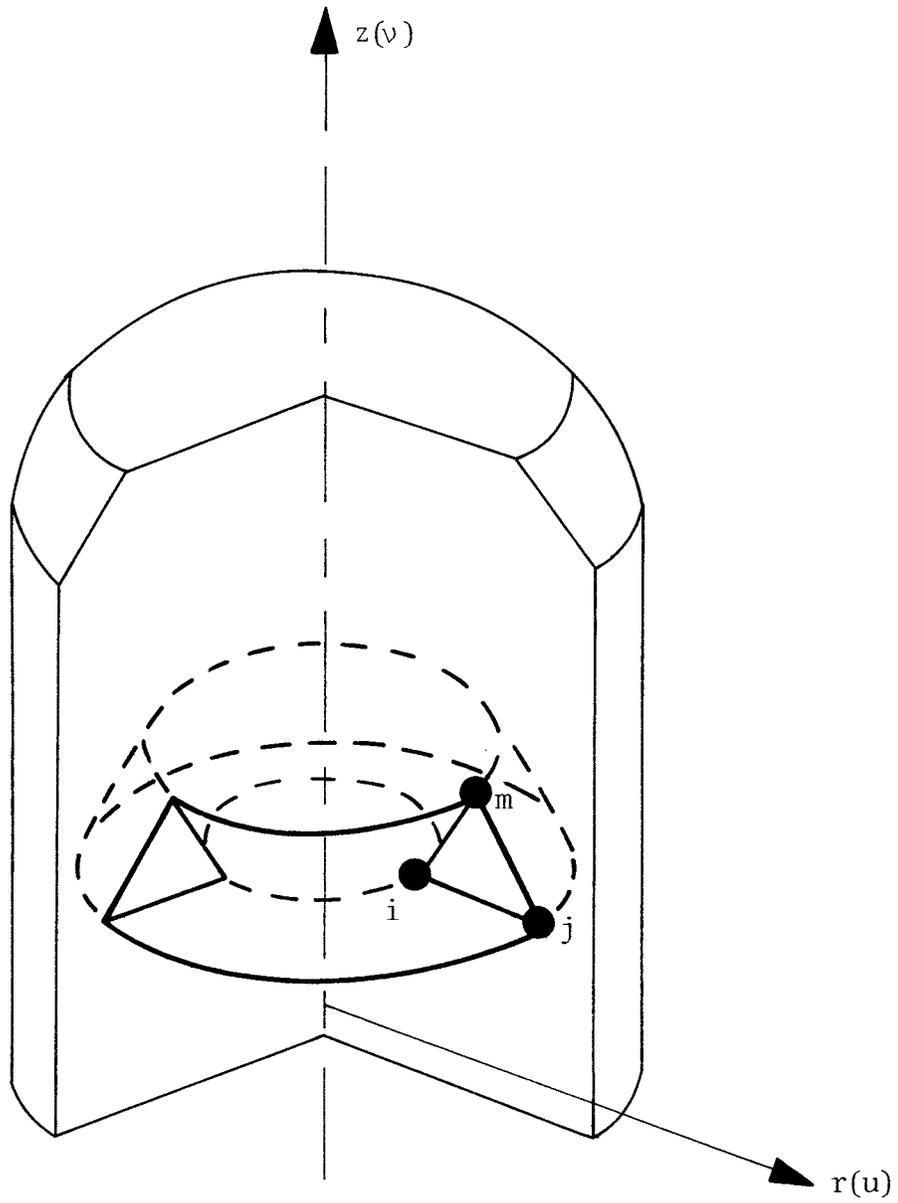
5. ESTRUCTURAS AXISIMETRICAS

5.1. INTRODUCCION

Por simetría, el estado de deformación y por consiguiente también el de tensión, de una sección plana cualquiera perpendicular al eje de simetría del cuerpo viene definido completamente por las dos componentes de los desplazamientos. En la figura 13 se representa una de tales secciones. Si r y z representan respectivamente las coordenadas radial y axial de un punto, siendo u y v los desplazamientos correspondientes, es fácil ver que se pueden usar precisamente las mismas funciones de desplazamientos utilizadas en el capítulo 3, para definir los desplazamientos dentro del elemento triangular i, j, m que se muestra en la figura. El volumen del material asociado a un "elemento" es ahora el de un sólido de revolución como el de la figura.

En los problemas de tensión o deformación planas el trabajo interno está ligado a las tres componentes de la deformación situadas en el plano de coordenadas, no apareciendo la componente de la tensión normal a dicho plano por ser nulos los valores tanto de dicha tensión como de la deformación.

En los problemas de revolución, todo desplazamiento radial introduce automáticamente una deformación en dirección circunferencial y como las tensiones en esa dirección son ciertamente distintas de cero, habría de considerarse esta cuarta componente de la deformación y la de tensión asociada a ella. Este es el punto clave que marca la diferencia esencial en el tratamiento de los problemas de revolución.



ELEMENTO FINITO DE UN SOLIDO DE REVOLUCION

5.2. LA MATRIZ DE RIGIDEZ

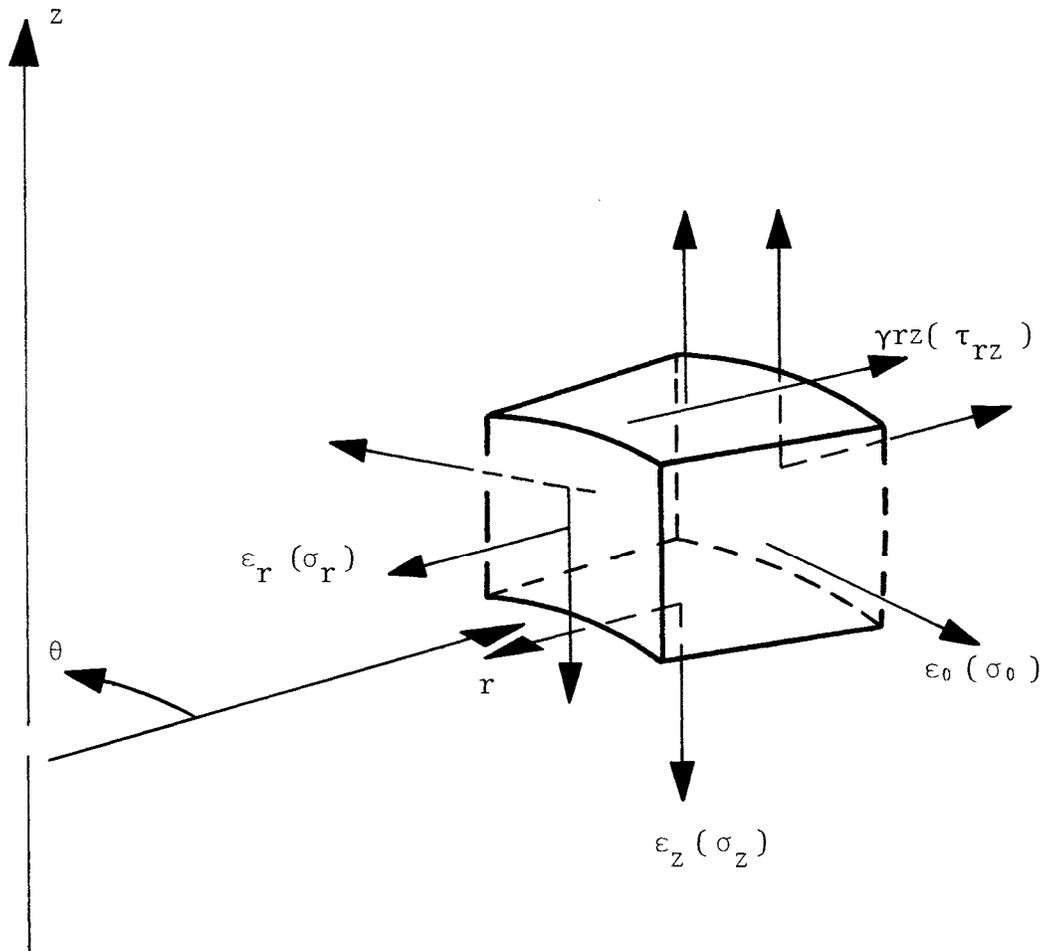
Para lo que se refiere a la función de desplazamientos, no hay variaciones sustanciales con respecto al caso plano ya comentado; mientras que se deben considerar cuatro componentes de la deformación. Estas son, en realidad, todas las componentes de la deformación no nulas, posibles en un sólido de revolución. En la figura 14, se muestran y definen dichas deformaciones y las tensiones asociadas.

El vector deformación que se define a continuación agrupa las componentes de la deformación a considerar, definiéndolas en función de los desplazamientos de un punto:

$$\{ \varepsilon \} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [L] \{ U \} \quad (52)$$

y sustituyendo en esta la ecuación (32) se obtiene la (34) siendo la matriz de deformaciones:

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & , & \frac{\partial N}{\partial z} \\ \frac{\partial N}{\partial r} & , & 0 \\ \frac{1}{r} N & , & 0 \\ \frac{\partial N}{\partial z} & , & \frac{\partial N}{\partial r} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 0 & , & c \\ b & , & 0 \\ a/r + b + c z/r, & 0 \\ c & , & b \end{bmatrix} \quad (53)$$



DEFORMACIONES Y TENSIONES QUE INTERVIENEN EN EN ANALISIS
DE SOLIDOS DE REVOLUCION

Debido a que en la matriz [B] figuran las coordenadas r y z, las deformaciones ya no son constantes dentro de cada elemento como ocurría en los casos de tensión o deformación plana. Esta variación de la deformación se debe al término ϵ_{θ} . Si los desplazamientos que se imponen son tales que (u) es proporcional a (r), todas las deformaciones serán entonces constantes.

Para lo que se refiere a la matriz de elasticidad [D], se considerará en primer lugar el material anisótropo "estratificado", ya que el caso del material isótropo puede considerarse sencillamente como caso particular del anterior.

Si el eje z representa la normal a los planos de los estratos, se puede escribir:

$$\begin{aligned}\epsilon_z &= \sigma_z/E_2 - \nu_2 \sigma_r/E_2 - \nu_2 \sigma_{\theta}/E_2 \\ \epsilon_r &= \nu_2 \sigma_z/E_2 + \sigma_r/E_1 - \nu_1 \sigma_{\theta}/E_1 \\ \epsilon_{\theta} &= -\nu_2 \sigma_z/E_2 - \nu_1 \sigma_r/E_1 + \sigma_{\theta}/E_1 \\ \gamma_{zr} &= \tau_{zr}/G_2\end{aligned}\tag{54}$$

Escribiendo además:

$$\frac{E_1}{E_2} = n \quad \text{y} \quad \frac{G_2}{E_2} = m$$

y despejando las tensiones se obtiene:

$$\left[D \right] = \frac{E_2}{(1 + \nu_1) (1 - \nu_1 - 2nm^2)} \quad \text{x (sigue)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 - \nu_1^2 & \nu_2(1 + \nu_1) & , \quad n \nu_2(1 + \nu_1) & , \quad 0 \\ & n(1 - \nu_2^2) & , \quad (\nu_1 + \nu_2^2)n & , \quad 0 \\ & \text{simétrica} & n(1 - \nu_2^2) & , \quad 0 \\ & & , \quad m(1 + \nu_1) \times (1 - \nu_1 - 2\nu_2^2) & \end{array} \right] \quad (55)$$

Para un material isótropo, se obtiene la matriz [D] tomando:

$$E_1 = E_2 = E \quad \text{o} \quad n = 1$$

y

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu$$

y empleando la conocida relación entre las constantes elásticas isótropas

$$\frac{G}{E_2} = \frac{G}{E} = m = \frac{1}{2(1 + \nu)}$$

Sustituyendo en la expresión (55) se obtiene:

$$[D] = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left[\begin{array}{ccc} 1 \frac{\nu}{1 - \nu} & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ & 1 \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & \text{simétrica} & \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \end{array} \right] \quad (56)$$

Finalmente, la matriz de rigidez del elemento ijm puede calcularse ahora a partir de la relación general (43). Recordando que la integral de volumen ha de extenderse a todo el anillo de material.

$$[K]^e = \int 2\pi [B]^T [D] [B] r dr dz \quad (57)$$

siendo en este caso una matriz simétrica 4 x 4.

No se puede efectuar la integración tan sencillamente como en el caso de tensión plana porque la matriz [B] es función de las coordenadas.

El procedimiento aproximado más sencillo es evaluar [B] en el centro de gravedad poniendo:

$$\bar{r} = (r_i + r_j + r_m)/3$$

y

$$\bar{z} = (z_i + z_j + z_m)/3$$

obteniéndose como primera aproximación

$$[K]^e = 2 \pi [\bar{B }]^T [D] [\bar{B }] \bar{r} \Delta \quad (58)$$

siendo Δ el área del triángulo.

B I B L I O G R A F I A

BATHE Y WILSON: " Numerical Methods in finite element Analisis " Practice - Hall, N. Jersey (1976).

CLOUGH: " The Finite Element in Plane Stress Analisis " Proceedings, 2nd. A.S.C.E. Conference on Electronic Computación, Pittsburg, Pa, (1960).

COURANT: " Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibriums and Vibrations ".
Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 49 (1963).

DESAI: " Elementary Finite Element Method ".
Prentice - Hall, Inc., New Jersey (1979).

GOODMAN Y DUNCAN: " The role of structure and solid mechanics in the designs of surface and underground excavations in rock ".
University of California, Berkeley, (1970).

GERSTLE: " Basic Structural Analisis ".
Prentice - Hall, Inc., New Jersey (1974).

TIMOSHENKO Y GOODIER: " Teory of Elasticity ".
Mc Graw - Hill, New York (1951).

WILSON: " Finite Element Analisis of two-dimensional structures " University of California, Berkeley (1963).

ZIENKIEWICZ: " El Método de los Elementos Finitos " Editorial Reverté S.A., Barcelona (1980).