Teoria do Consumidor (Parte 2)

Aula 02

Rogério Mazali

Microeconomia I

27/08/2020

- Nas aulas anteriores vimos os quatro principais blocos para construir a Teoria do Consumidor:

- Nas aulas anteriores vimos os quatro principais blocos para construir a Teoria do Consumidor:
  - Conjunto de consumo;

O Problema do Consumidor

Introdução

- Nas aulas anteriores vimos os quatro principais blocos para construir a Teoria do Consumidor:
    - Conjunto de consumo;
    - Conjunto factível;

- Nas aulas anteriores vimos os quatro principais blocos para construir a Teoria do Consumidor:
  - Conjunto de consumo;
  - Conjunto factível;
  - Relações de preferência;

- Nas aulas anteriores vimos os quatro principais blocos para construir a Teoria do Consumidor:
    - Conjunto de consumo;
    - Conjunto factível;
    - Relações de preferência;
    - Hipóteses comportamentais.

- Nas aulas anteriores vimos os quatro principais blocos para construir a Teoria do Consumidor:
    - Conjunto de consumo;
    - Conjunto factível;
    - Relações de preferência;
    - Hipóteses comportamentais.
- Aqui iremos conectar esses blocos num consolidado teórico.

- Suponha um consumidor que tenha que escolher uma cesta de consumo ótima $\mathbf{x}^* \in X$ em que:

- Suponha um consumidor que tenha que escolher uma cesta de consumo ótima $\mathbf{x}^* \in X$ em que:
  - Conjunto de consumo: $X = \mathbb{R}^n_+$;

O Problema do Consumidor

Introdução

- Suponha um consumidor que tenha que escolher uma cesta de consumo ótima $\mathbf{x}^* \in X$ em que:
  - Conjunto de consumo: $X = \mathbb{R}^n_+$;
  - Conjunto factível: $B \subset \mathbb{R}^n_+$;

- Suponha um consumidor que tenha que escolher uma cesta de consumo ótima $\mathbf{x}^* \in X$ em que:
  - Conjunto de consumo: $X = \mathbb{R}^n_+$;
  - Conjunto factível: $B \subset \mathbb{R}^n_+$;
  - Relações de preferência: $\succeq$ definida em $\mathbb{R}^n_+$;

- Suponha um consumidor que tenha que escolher uma cesta de consumo ótima $\mathbf{x}^* \in X$ em que:
    - Conjunto de consumo: $X = \mathbb{R}^n_+$;
    - Conjunto factível: $B \subset \mathbb{R}^n_+$;
    - Relações de preferência: $\succeq$ definida em $\mathbb{R}^n_+$;
    - Hipóteses comportamentais: Axiomas 1 a 5; preferências são:

- Suponha um consumidor que tenha que escolher uma cesta de consumo ótima $\mathbf{x}^* \in X$ em que:
  - Conjunto de consumo: $X = \mathbb{R}^n_+$;
  - Conjunto factível: $B \subset \mathbb{R}^n_+$;
  - Relações de preferência: $\succeq$ definida em $\mathbb{R}^n_+$;
  - Hipóteses comportamentais: Axiomas 1 a 5; preferências são:
    - completas;

- Suponha um consumidor que tenha que escolher uma cesta de consumo ótima $\mathbf{x}^* \in X$ em que:
  - Conjunto de consumo: $X = \mathbb{R}^n_+$;
  - Conjunto factível: $B \subset \mathbb{R}^n_+$;
  - Relações de preferência: $\succeq$ definida em $\mathbb{R}^n_+$;
  - Hipóteses comportamentais: Axiomas 1 a 5; preferências são:
    - completas;
    - transitivas;

- Suponha um consumidor que tenha que escolher uma cesta de consumo ótima $\mathbf{x}^* \in X$ em que:
    - Conjunto de consumo: $X = \mathbb{R}^n_+$;
    - Conjunto factível: $B \subset \mathbb{R}^n_+$;
    - Relações de preferência: $\succeq$ definida em $\mathbb{R}^n_+$;
    - Hipóteses comportamentais: Axiomas 1 a 5; preferências são:
        - completas;
        - transitivas;
        - contínuas;

- Suponha um consumidor que tenha que escolher uma cesta de consumo ótima $\mathbf{x}^* \in X$ em que:
    - Conjunto de consumo: $X = \mathbb{R}^n_+$;
    - Conjunto factível: $B \subset \mathbb{R}^n_+$;
    - Relações de preferência: $\succeq$ definida em $\mathbb{R}^n_+$;
    - Hipóteses comportamentais: Axiomas 1 a 5; preferências são:
        - completas;
        - transitivas;
        - contínuas;
        - estritamente monótonas;

- Suponha um consumidor que tenha que escolher uma cesta de consumo ótima $\mathbf{x}^* \in X$ em que:
    - Conjunto de consumo: $X = \mathbb{R}^n_+$;
    - Conjunto factível: $B \subset \mathbb{R}^n_+$;
    - Relações de preferência: $\succeq$ definida em $\mathbb{R}^n_+$;
    - Hipóteses comportamentais: Axiomas 1 a 5; preferências são:
        - completas;
        - transitivas;
        - contínuas;
        - estritamente monótonas;
        - estritamente convexas.

- Consumidor irá escolher sua cesta de consumo preferida $\mathbf{x}^*$ dentro de suas possibilidades em B de acordo com suas preferências $\succeq$.

- Consumidor irá escolher sua cesta de consumo preferida $\mathbf{x}^*$ dentro de suas possibilidades em B de acordo com suas preferências $\succeq$.
- Formalmente, consumidor escolhe:

$$\mathbf{x}^* \in B \text{ tal que } \mathbf{x}^* \succeq \mathbf{x} \text{ para todo } \mathbf{x} \in B.$$

- Consumidor irá escolher sua cesta de consumo preferida $\mathbf{x}^*$ dentro de suas possibilidades em B de acordo com suas preferências $\succeq$.
- Formalmente, consumidor escolhe:

$$\mathbf{x}^* \in B \text{ tal que } \mathbf{x}^* \succeq \mathbf{x} \text{ para todo } \mathbf{x} \in B.$$

- Como os axiomas de 1 a 4 são satisfeitos, pelo Teorema da Representação, sabemos que existe uma função utilidade $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ contínua e estritamente crescente que representa $\succeq$.

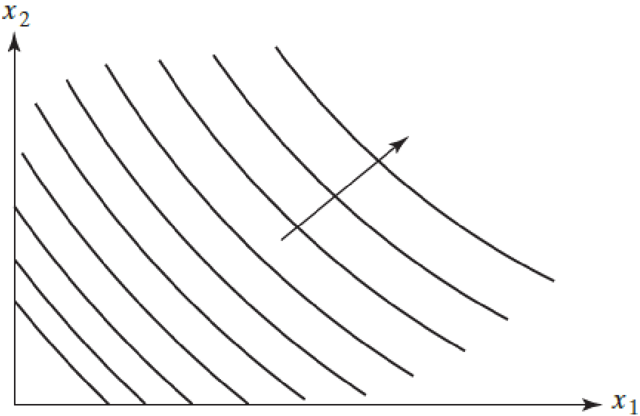
- Como os axiomas de 1 a 5 são satisfeitos, pelo Teorema Propriedades de Preferências e Funções Utilidade, sabemos que $u(\cdot)$ é uma função quasi-côncava.

- Como os axiomas de 1 a 5 são satisfeitos, pelo Teorema Propriedades de Preferências e Funções Utilidade, sabemos que $u(\cdot)$ é uma função quasi-côncava.
- Graficamente, temos que as curvas de nível dessa função são os conjuntos de indiferença $\sim(\mathbf{x})$ definidos na aula anterior. Elas são:

- Como os axiomas de 1 a 5 são satisfeitos, pelo Teorema Propriedades de Preferências e Funções Utilidade, sabemos que $u(\cdot)$ é uma função quasi-côncava.
- Graficamente, temos que as curvas de nível dessa função são os conjuntos de indiferença $\sim(\mathbf{x})$ definidos na aula anterior. Elas são:
  - Negativamente inclinadas;

- Como os axiomas de 1 a 5 são satisfeitos, pelo Teorema Propriedades de Preferências e Funções Utilidade, sabemos que $u(\cdot)$ é uma função quasi-côncava.
- Graficamente, temos que as curvas de nível dessa função são os conjuntos de indiferença $\sim(\mathbf{x})$ definidos na aula anterior. Elas são:
  - Negativamente inclinadas;
  - Convexas;

- Como os axiomas de 1 a 5 são satisfeitos, pelo Teorema Propriedades de Preferências e Funções Utilidade, sabemos que $u(\cdot)$ é uma função quasi-côncava.
- Graficamente, temos que as curvas de nível dessa função são os conjuntos de indiferença $\sim(\mathbf{x})$ definidos na aula anterior. Elas são:
  - Negativamente inclinadas;
  - Convexas;
  - Paralelas entre si.



x_2
x_1

- Supomos que o consumidor faz suas escolhas num contexto de **economia de mercado** (sistema econômico em que todas as transações são mediadas pelo mercado).

- Supomos que o consumidor faz suas escolhas num contexto de **economia de mercado** (sistema econômico em que todas as transações são mediadas pelo mercado).
- Há um mercado para cada bem $i \in \{1, \ldots, n\}$, que são negociados por preços p_i cada.

- Supomos que o consumidor faz suas escolhas num contexto de **economia de mercado** (sistema econômico em que todas as transações são mediadas pelo mercado).
- Há um mercado para cada bem $i \in \{1, \ldots, n\}$, que são negociados por preços p_i cada.
- Indivíduos não têm *poder de mercado* $=>$ força insignificante (não afetam preço independentemente da quantidade negociada).

- Supomos que o consumidor faz suas escolhas num contexto de **economia de mercado** (sistema econômico em que todas as transações são mediadas pelo mercado).
- Há um mercado para cada bem $i \in \{1, \ldots, n\}$, que são negociados por preços p_i cada.
- Indivíduos não têm *poder de mercado* $=>$ força insignificante (não afetam preço independentemente da quantidade negociada).
    - Vetor de preços $\mathbf{p} = \{p_1, \ldots, p_n\} \gg \mathbf{0}$ é fixo, tomado como dado pelo consumidor.

- Supomos que o consumidor faz suas escolhas num contexto de **economia de mercado** (sistema econômico em que todas as transações são mediadas pelo mercado).
- Há um mercado para cada bem $i \in \{1, \ldots, n\}$, que são negociados por preços p_i cada.
- Indivíduos não têm *poder de mercado* $=>$ força insignificante (não afetam preço independentemente da quantidade negociada).
  - Vetor de preços $\mathbf{p} = \{p_1, \ldots, p_n\} \gg \mathbf{0}$ é fixo, tomado como dado pelo consumidor.
- Consumidor é dotado de uma renda monetária $y \geq 0$.

- Soma das quantias $p_i x_i$ gastas com cada bem não pode exceder y, isto é:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y.$$

- Soma das quantias $p_i x_i$ gastas com cada bem não pode exceder y, isto é:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y.$$

- Equação acima é chamada **Restrição Orçamentária**.

- Soma das quantias $p_i x_i$ gastas com cada bem não pode exceder y, isto é:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y.$$

- Equação acima é chamada **Restrição Orçamentária**.
- Portanto, podemos escrever o conjunto factível como:

$$B = \{\mathbf{x} \in X \,|\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y\}$$

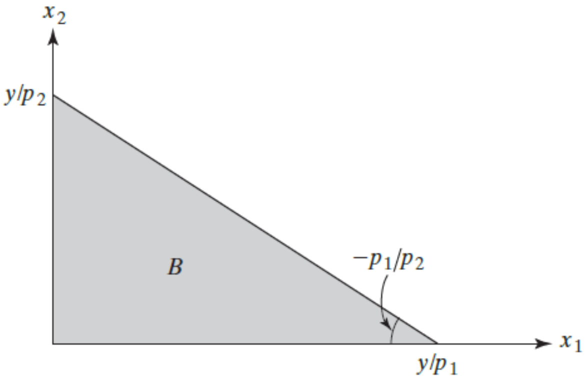
- Soma das quantias $p_i x_i$ gastas com cada bem não pode exceder y, isto é:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y.$$

- Equação acima é chamada **Restrição Orçamentária**.
- Portanto, podemos escrever o conjunto factível como:

$$B = \{\mathbf{x} \in X \,|\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y\}$$

- Conjunto factível escrito dessa forma é chamado de **Conjunto Orçamentário**.



x_2
y/p_2
B
$-p_1/p_2$
y/p_1
x_1

- Podemos então reescrever o problema do consumidor como:

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n_+} u(\mathbf{x}) \qquad \text{sujeito a} \qquad \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \leq y. \tag{1}$$

- A função $u(\mathbf{x})$ é contínua e tem imagem real.

- A função $u(\mathbf{x})$ é contínua e tem imagem real.
- O conjunto B é não-vazio, fechado e limitado $=>$ subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n_+$.

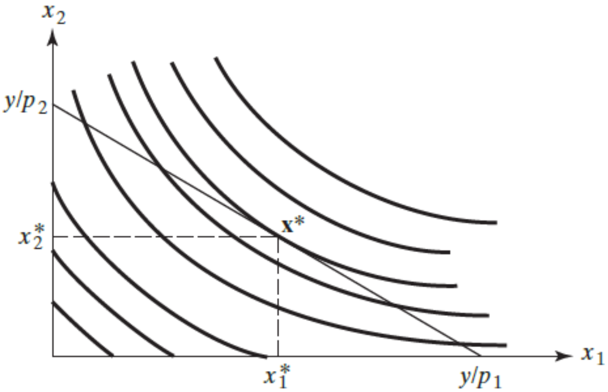
- A função $u(\mathbf{x})$ é contínua e tem imagem real.
- O conjunto B é não-vazio, fechado e limitado $=>$ subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n_+$.
- Pelo Teorema de Weierstrass, $u(\mathbf{x})$ possui um máximo global em B.

- A função $u(\mathbf{x})$ é contínua e tem imagem real.
- O conjunto B é não-vazio, fechado e limitado $=>$ subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n_+$.
- Pelo Teorema de Weierstrass, $u(\mathbf{x})$ possui um máximo global em B.
- Como B é convexo e $u(\mathbf{x})$ é estritamente quasi-côncava, esse ponto de máximo é único.

- A função $u(\mathbf{x})$ é contínua e tem imagem real.
- O conjunto B é não-vazio, fechado e limitado $=>$ subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n_+$.
- Pelo Teorema de Weierstrass, $u(\mathbf{x})$ possui um máximo global em B.
- Como B é convexo e $u(\mathbf{x})$ é estritamente quasi-côncava, esse ponto de máximo é único.
- Preferências estritamente monótonas $=>$ máximo deve ser atingido na fronteira nordeste de B.

- A função $u(\mathbf{x})$ é contínua e tem imagem real.
- O conjunto B é não-vazio, fechado e limitado $=>$ subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n_+$.
- Pelo Teorema de Weierstrass, $u(\mathbf{x})$ possui um máximo global em B.
- Como B é convexo e $u(\mathbf{x})$ é estritamente quasi-côncava, esse ponto de máximo é único.
- Preferências estritamente monótonas $=>$ máximo deve ser atingido na fronteira nordeste de B.
  - Restrição orçamentária precisa ser satisfeita com igualdade, i.e., $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* = y$.

- A função $u(\mathbf{x})$ é contínua e tem imagem real.
- O conjunto B é não-vazio, fechado e limitado => subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n_+$.
- Pelo Teorema de Weierstrass, $u(\mathbf{x})$ possui um máximo global em B.
- Como B é convexo e $u(\mathbf{x})$ é estritamente quasi-côncava, esse ponto de máximo é único.
- Preferências estritamente monótonas => máximo deve ser atingido na fronteira nordeste de B.
  - Restrição orçamentária precisa ser satisfeita com igualdade, i.e., $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* = y$.
- Solução típica:



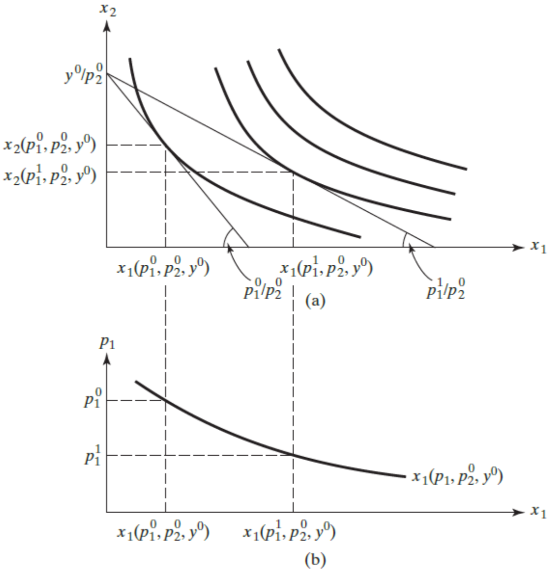
x_2
y/p_2
x_2^*
$\mathbf{x}^*$
x_1^*
y/p_1
x_1

- Solução depende dos parâmetros $\mathbf{p}$ e y do modelo, i.e., $x_i^* = x_i(\mathbf{p}, y)$.

- Solução depende dos parâmetros $\mathbf{p}$ e y do modelo, i.e., $x_i^* = x_i(\mathbf{p}, y)$.
- Assim, dizemos que a solução x_i^* do problema do consumidor nos dá a **Função Demanda Marshalliana** do bem i.

- Solução depende dos parâmetros $\mathbf{p}$ e y do modelo, i.e., $x_i^* = x_i(\mathbf{p}, y)$.
- Assim, dizemos que a solução x_i^* do problema do consumidor nos dá a **Função Demanda Marshalliana** do bem i.
- Em notação vetorial, temos $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\mathbf{p}, y)$.

- Solução depende dos parâmetros $\mathbf{p}$ e y do modelo, i.e., $x_i^* = x_i(\mathbf{p}, y)$.
- Assim, dizemos que a solução x_i^* do problema do consumidor nos dá a **Função Demanda Marshalliana** do bem i.
- Em notação vetorial, temos $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\mathbf{p}, y)$.
- Podemos construir graficamente a função de demanda do consumidor observando como a solução do problema do consumidor muda quando muda o preço de um bem.



x_2
y^0/p_2^0
$x_2(p_1^0, p_2^0, y^0)$
$x_2(p_1^1, p_2^0, y^0)$
x_1
$x_1(p_1^0, p_2^0, y^0)$
$x_1(p_1^1, p_2^0, y^0)$
p_1^0/p_2^0
p_1^1/p_2^0
(a)
p_1
p_1^0
p_1^1
$x_1(p_1, p_2^0, y^0)$
x_1
$x_1(p_1^0, p_2^0, y^0)$
$x_1(p_1^1, p_2^0, y^0)$
(b)

- A função $u(\cdot)$ é contínua, de valor real, não-decrescente em cada argumento, e estritamente quasi-côncava.

- A função $u(\cdot)$ é contínua, de valor real, não-decrescente em cada argumento, e estritamente quasi-côncava.
- Se impusermos diferenciabilidade, poderemos usar as ferramentas do cálculo diferencial para resolver explicitamente o problema do consumidor.

- A função $u(\cdot)$ é contínua, de valor real, não-decrescente em cada argumento, e estritamente quasi-côncava.
- Se impusermos diferenciabilidade, poderemos usar as ferramentas do cálculo diferencial para resolver explicitamente o problema do consumidor.
- Suponha $u(\cdot)$ diferenciável.

- A função $u(\cdot)$ é contínua, de valor real, não-decrescente em cada argumento, e estritamente quasi-côncava.
- Se impusermos diferenciabilidade, poderemos usar as ferramentas do cálculo diferencial para resolver explicitamente o problema do consumidor.
- Suponha $u(\cdot)$ diferenciável.
- Seja $\lambda \geq 0$ o multiplicador Lagrangeano do Problema do Consumidor (1).

- A função $u(\cdot)$ é contínua, de valor real, não-decrescente em cada argumento, e estritamente quasi-côncava.
- Se impusermos diferenciabilidade, poderemos usar as ferramentas do cálculo diferencial para resolver explicitamente o problema do consumidor.
- Suponha $u(\cdot)$ diferenciável.
- Seja $\lambda \geq 0$ o multiplicador Lagrangeano do Problema do Consumidor (1).
- Reescrevendo a restrição orçamentária como $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* - y \leq \mathbf{0}$, a função Lagrangeana de (1) é:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = u(\mathbf{x}) - \lambda \left[\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* - y\right]$$

- A função $u(\cdot)$ é contínua, de valor real, não-decrescente em cada argumento, e estritamente quasi-côncava.
- Se impusermos diferenciabilidade, poderemos usar as ferramentas do cálculo diferencial para resolver explicitamente o problema do consumidor.
- Suponha $u(\cdot)$ diferenciável.
- Seja $\lambda \geq 0$ o multiplicador Lagrangeano do Problema do Consumidor (1).
- Reescrevendo a restrição orçamentária como $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* - y \leq \mathbf{0}$, a função Lagrangeana de (1) é:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = u(\mathbf{x}) - \lambda \left[\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* - y\right]$$

- Podemos aplicar o Teorema de Kuhn-Tucker para encontrar $\mathbf{x}^*$.

- Se existe uma solução interior $\mathbf{x}^* \gg \mathbf{0}$, então existe um $\lambda^* > 0$ tal que $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ satisfaz as condições de Kuhn-Tucker:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} - \lambda^* p_i = 0, \tag{2}$$

para todo $i = \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* - y \leq \mathbf{0}, \tag{3}$$
$$\lambda^* \left[\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* - y\right] = 0. \tag{4}$$

- Por monotonicidade, a condição (3) deve ser satisfeita com igualdade e, portanto, a condição (4) é redundante.

- Por monotonicidade, a condição (3) deve ser satisfeita com igualdade e, portanto, a condição (4) é redundante.
- Podemos caracterizar a solução do Problema do Consumidor como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} - \lambda^* p_i = 0, \tag{5}$$

para todo $i = \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* - y = \mathbf{0}. \tag{6}$$

- Supondo $\nabla u(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$, temos que as condições de primeira ordem (5) e (6) implicam em:
$$\lambda^* = \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} \Big/ p_i$$
para todo $i = \{1, \ldots, n\}$. Portanto:
$$\frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} \Big/ p_i = \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} \Big/ p_j$$
para todo $i, j = \{1, \ldots, n\}$. Rearranjando os termos, temos:
$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{\frac{\partial u(x_i, x_j)}{\partial x_i}}{\frac{\partial u(x_i, x_j)}{\partial x_j}} = TMS_{i,j}(x_i, x_j) = \left|\frac{dx_j}{dx_i}\right|_{du=0}$$

- As condições de primeira ordem de Kuhn-Tucker são apenas condições necessárias.

Theorem (Suficiência das Condições de 1a. Ordem do Consumidor)

Suponha que $u(\mathbf{x})$ *seja contínua e quasi-côncava em* $\mathbb{R}^n_+$*, e que* $(\mathbf{p}, y) \gg \mathbf{0}$*. Se* $u(\mathbf{x})$ *for diferenciável em* $\mathbf{x}^*$*, e* $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ *é uma solução para o sistema de equações (5) e (6), então* $\mathbf{x}^*$ *é uma solução para o problema de maximização do consumidor aos preços* $\mathbf{p}$ *e renda* y*.*

- As condições de primeira ordem de Kuhn-Tucker são apenas condições necessárias.
- Essas condições não são suficientes para um máximo global para um problema genérico de maximização.

Theorem (Suficiência das Condições de 1a. Ordem do Consumidor)

Suponha que $u(\mathbf{x})$ seja contínua e quasi-côncava em $\mathbb{R}^n_+$, e que $(\mathbf{p}, y) \gg \mathbf{0}$. Se $u(\mathbf{x})$ for diferenciável em $\mathbf{x}^*$, e $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ é uma solução para o sistema de equações (5) e (6), então $\mathbf{x}^*$ é uma solução para o problema de maximização do consumidor aos preços $\mathbf{p}$ e renda y.

- As condições de primeira ordem de Kuhn-Tucker são apenas condições necessárias.
- Essas condições não são suficientes para um máximo global para um problema genérico de maximização.
- No entanto, para o problema (1), essas condições também são condições suficientes.

Theorem (Suficiência das Condições de 1a. Ordem do Consumidor)

Suponha que $u(\mathbf{x})$ seja contínua e quasi-côncava em $\mathbb{R}^n_+$, e que $(\mathbf{p}, y) \gg \mathbf{0}$. Se $u(\mathbf{x})$ for diferenciável em $\mathbf{x}^*$, e $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ é uma solução para o sistema de equações (5) e (6), então $\mathbf{x}^*$ é uma solução para o problema de maximização do consumidor aos preços $\mathbf{p}$ e renda y.

Demonstração.

Se $u(\mathbf{x})$ é quasi-côncava, então, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0}$ com $u(\mathbf{x}^1) \geq u(\mathbf{x})$ e $u(\cdot)$ diferenciável em $\mathbf{x}$, temos que

$$\nabla u(\mathbf{x}) \left(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}\right) \geq 0.$$

Suponha agora que $\nabla u(\mathbf{x}^*)$ existe e que $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ é uma solução para o sistema de equações (5) e (6). Então

$$\begin{aligned} \nabla u(\mathbf{x}^*) &= \lambda^* \mathbf{p} \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* &= y. \end{aligned}$$

Se $\mathbf{x}^*$ não maximizar $u(\cdot)$ em B, então existe um $\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{0}$ tal que

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}^0) &> u(\mathbf{x}^*) \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^0 &\leq y. \end{aligned}$$

Demonstração (continuação).

Porque $u(\cdot)$ é contínua e $y > 0$, as desigualdades acima implicam que:

$$\begin{array}{rcl} u(t\mathbf{x}^0) & > & u(\mathbf{x}^*) \\ \mathbf{p}\cdot t\mathbf{x}^0 & < & y \end{array}$$

para um $t \in [0,1]$ suficientemente próximo de 1. Fixando $\mathbf{x}^1 = t\mathbf{x}^0$, temos:

$$\begin{array}{rcl} \nabla u(\mathbf{x}^*)\left(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^*\right) & = & \lambda^* \mathbf{p}\left(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^*\right) \\ & = & \lambda^*\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^1 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^*\right) \\ & < & \lambda^*(y - y) \\ & = & 0, \end{array}$$

o que contradiz a quasi-concavidade de $u(\mathbf{x})$. $\square$