

NÚMEROS NATURALES

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS NATURALES.

Saber cuántos animales tenía en su rebaño o el tiempo transcurrido desde un determinado momento fue una necesidad del *Homo sapiens* desde los albores de la humanidad. Para realizarlo se valió de diversas representaciones que a través de la historia se convirtieron en los signos que hoy conocemos como números.

El conjunto¹ de los números naturales está formado por:

$$\mathbf{N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,.. \infty\}^2}$$

Con los números naturales positivos podemos:

1. Contar los elementos de un conjunto (**números cardinales**).
Ejemplo: 5 son los dedos de una mano.
2. Expresar la posición u orden que ocupa un elemento en un conjunto (**números ordinales**).
Ejemplo: el lunes es el primer día de la semana, el martes es el segundo.
3. Identificar y diferenciar los distintos elementos de un conjunto.
Ejemplo: El número de identificación personal de Juana es el 4973869.
4. Los números naturales están ordenados, por lo que podemos comparar dos números naturales entre sí: Ejemplo:
En la secuencia de números 0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, podemos decir que
5 es mayor que 3 porque está después del número 3
3 es menor que 9 porque antes del número 9
5. Los números naturales no tienen límite³, si a un número natural le sumamos 1, siempre obtendremos el número natural que le sucede (le sigue), si le restamos 1 tendremos el número natural que le antecede (el anterior). El número 1 no tiene antecesor. No todos los matemáticos incluyen el cero (0) dentro de los números naturales. Nosotros lo incluiremos.

RECTA NUMÉRICA. REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES.

Los números naturales se pueden representar en una recta, que denominamos *Recta Numérica*, ordenados de menor a mayor.

Para ello, simplemente señalamos un punto sobre una recta, el cual marcamos con el dígito cero (0). A la derecha del cero, y con igual separación entre ellos (equidistancia), situamos de menor a mayor los números naturales: 1, 2, 3..., como puede apreciarse en la Figura 1.

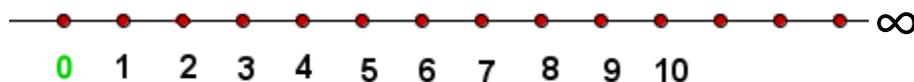


Figura 1

¹ Conjunto: Colección o grupo de entidades que cumplen una determinada condición característica.

² ∞ Este símbolo representa el infinito en Matemáticas.

VALOR POSICIONAL DE UN NÚMERO NATURAL.

Se define como *valor posicional* de un número natural al lugar que ocupa el dígito⁴ en un numeral⁵. Dicha posición determina su valor.

Al formar los números naturales parte del sistema de numeración decimal, estos se ordena en períodos, clases y órdenes; teniendo cada período dos clases y cada clase tres órdenes, como puede observarse en la tabla de la figura 2:

Período de los millones						Período de las unidades					
Clase de los millares de millón			Clase de los millones			Clase de los millares (mil)			Clase de las unidades		
Orden Centenas	Orden Decenas	Orden Unidades	Orden Centenas	Orden Decenas	Orden Unidades	Orden Centenas	Orden Decenas	Orden Unidades	Orden Centenas	Orden Decenas	Orden Unidades

Figura 2

Veamos cómo se expresaría la distancia más cercana de la Tierra a la Luna en kilómetros⁶, la cual es 363,104 km.

Ubiquemos cada dígito de acuerdo a la tabla de la figura 2, escribiéndolos de derecha a izquierda.

Millones						Unidades					
Millares de millón			Millones			Millares			Unidades		
C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U
						3	6	3	1	0	4

Cada uno de los dígitos ocupa una posición diferente, por lo que el valor de cada uno de ellos variará de acuerdo al lugar que ocupa.

Para escribir el valor de cada dígito, se escribe el signo del dígito y se sustituyen los lugares de la derecha con ceros hasta llegar a la unidad. Cada clase se separa con una coma (,) para facilitar su lectura.

En el ejemplo observamos que el dígito 3 se repite dos veces. ¿Tiene el mismo valor en ambas posiciones? De acuerdo a lo explicado anteriormente la respuesta es No. Veamos

- En la posición *Centenas de Millar* tiene tres centenas de millar, 0 decenas de millar, 0 unidades de millar, 0 centenas, 0 decenas, 0 unidades, lo que indica que su valor es 300,000.

⁴ Dígito: Número que puede expresarse usando un numeral o guarismo de una sola cifra: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

⁵ Numeral: Un símbolo o nombre que representa un número. Ejemplo: 8, 17, 23435, quince, veinte y tres, etc. todos son numerales

⁶ <http://www.universetoday.com/103206/what-is-the-distance-to-the-moon/>

- En la posición *Unidades de Millar* tiene tres unidades de millar, 0 centenas, 0 decenas, 0 unidades, por lo tanto, su valor es 3,000.

Observe que aunque el dígito es el mismo, en este caso 3, su valor ha dependido del lugar que ocupó en cada momento dentro del número.

DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA DE UN NÚMERO NATURAL.

Como vimos en la sección anterior, podemos expresar el *valor posicional* de cada dígito, la suma de todos ellos nos dará como resultado el propio número.

Tomemos como ejemplo la menor distancia de la Tierra a la Luna en kilómetros:

Millones						Unidades					
Millares de millón			Millones			Millares			Unidades		
Centena	Decena	Unidad	Centena	Decena	Unidad	Centena	Decena	Unidad	Centena	Decena	Unidad
						3	0	0	0	0	0
							6	0	0	0	0
								3	0	0	0
									1	0	0
										0	0
											4
SUMA						3	6	3	1	0	4

Podemos concluir que la posición de un dígito en un número es determinante para conocer su valor. De ello se desprende que para las operaciones aritméticas de suma y resta, como veremos más adelante, debe tenerse un estricto respeto a la posición que ocupa cada dígito en un numeral.

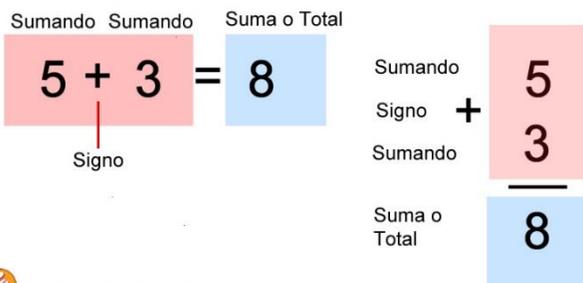
Veamos otro ejemplo. Si como promedio nuestro corazón late 68 veces en una hora, al cabo de un año nuestro corazón habrá latido en 35,740,800 ocasiones.

Millones						Unidades					
Millares de millón			Millones			Millares			Unidades		
Centena	Decena	Unidad	Centena	Decena	Unidad	Centena	Decena	Unidad	Centena	Decena	Unidad
				3	0						
					5	0	0	0	0	0	0
						7	0	0	0	0	0
							4	0	0	0	0
								0	0	0	0
									8	0	0
										0	0
											0
SUMA						3	5	7	4	0	8

SUMA DE NÚMEROS NATURALES

Mediante la suma podemos realizar la acción de añadir o adicionar cantidades. Las cantidades que se suman se denominan *sumandos*, la cantidad que se obtiene se denomina *suma o total*, también se le dice *Resultado*.

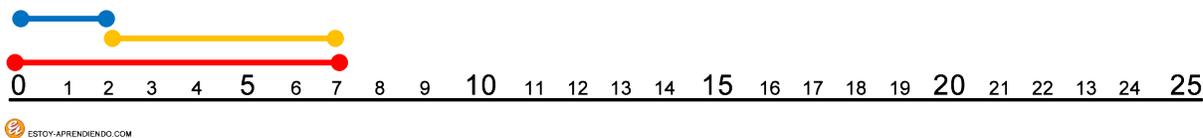
Elementos de una suma



Al sumar lo que hacemos es adicionar valores teniendo en cuenta el *valor posicional* de cada número de acuerdo a nuestro sistema de numeración decimal. Cada vez que al adicionar (sumar) pasamos del número 9, debemos colocar un 0 y sumar el valor de las posiciones mayores de 9 calculada a la siguiente posición.

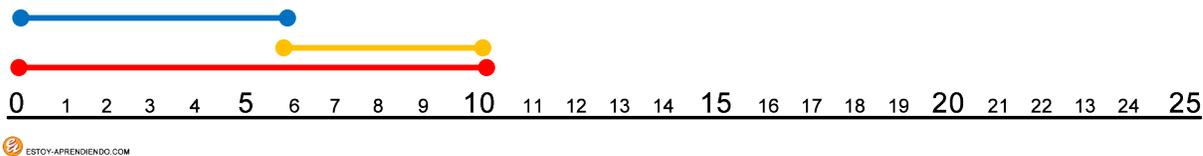
Veamos algunos ejemplos sobre la *Recta Numérica*:

a) $2 + 5 = 7$



Avanzo dos espacios representando al número 2 (línea azul), avanzo entonces 5 espacios representando al número 5 (línea amarilla). Al adicionar al 2 el número 5, he llegado al número 7 (línea roja).
La suma de $2 + 5 = 7$

b) $6 + 4 = 10$



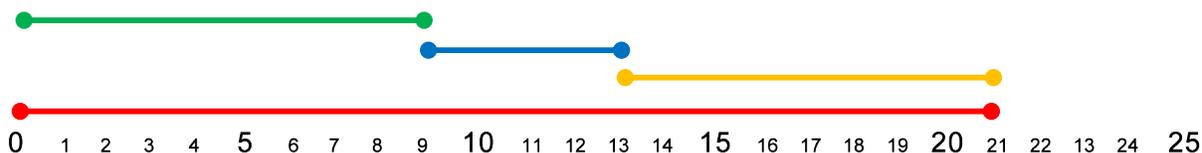
Avanzo seis espacios representando al número 6 (línea azul), avanzo entonces 4 espacios representando al número 4 (línea amarilla). Al adicionar al 6 el número 4, he llegado al número 10 (línea roja).
La suma de $6 + 4 = 10$

Observe que no se ha podido escribir el número diez con un solo dígito, se han necesitado dos dígitos, el 1 y el 0.

Millones						Unidades					
Millares de millón			Millones			Millares			Unidades		
C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U
										1	0

El 1 representa las decenas y vale 10, el 0 a las unidades vale 0, indica que no hay unidades.

c) $9 + 4 + 8 = 21$



ESTOY-APRENDIENDO.COM

Avanzo nueve espacios representando al número 9 (línea verde), avanzo entonces 4 espacios representando al número 4 (línea azul) y finalmente avanzo ocho espacios representando al número 8. Al adicionar al 9 el número 4 y el 8, he llegado al número 21 (línea roja).

La suma de $9 + 4 + 8 = 21$

Observe que al igual que en el ejemplo b), no se ha podido escribir el número veinte y uno con un solo dígito, se han necesitado dos dígitos, el 2 y el 1.

Millones						Unidades					
Millares de millón			Millones			Millares			Unidades		
C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U
										2	1

El 2 representa las decenas y vale 20, el 1 a las unidades y vale 1.

d) $7 + 10 + 21 = 38$

Sumar gráficamente (a través de la Recta Numérica) nos llevaría muchísimo tiempo y por lo que debemos utilizar un método más rápido.

Colocamos los números verticalmente, ordenándolos de derecha a izquierda **de tal manera que la clase-orden de cada número caiga debajo de la misma clase-orden de la anterior**. Debajo del último número trazamos una raya y a la izquierda colocamos el signo de sumar (+)

$$\begin{array}{r} 7 \\ 10 \\ \text{Sumamos primero las unidades} \quad + \underline{21} \\ 38 \end{array}$$

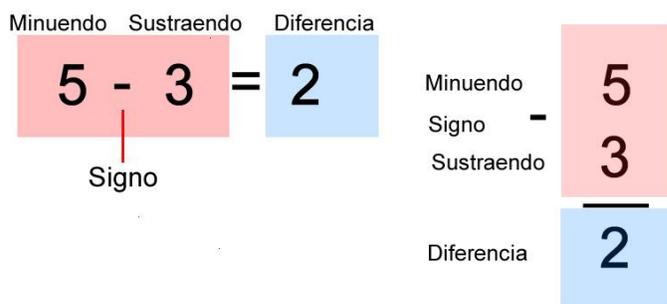
RESTA DE NÚMEROS NATURALES

La resta, también conocida como sustracción, es una operación que consiste en reducir o separar algo de un todo. Restar es una de las operaciones fundamentales de la matemática, siendo junto con la suma la operación más simple.

La resta consiste en el desarrollo de la descomposición de una cantidad, de la cual debemos eliminar una parte para obtener el resultado.

La resta es la operación inversa de la suma.

Elementos de una resta



Si $a + b = c$, entonces $c - a = b$

Veamos un ejemplo:

$$5 + 3 = 8$$

$$8 - 5 = 3$$



Propiedades de la resta de números naturales

1. La resta tiene la propiedad de que si sumamos el resultado de la resta con el sustraendo, obtendremos al minuendo

$$8 - 3 = 5 \rightarrow 5 + 3 = 8$$

$$12 - 4 = 8 \rightarrow 8 + 4 = 12$$

NO es interna

El resultado de restar dos números naturales no siempre es otro número natural.

$$2 - 5 \notin \mathbb{N}$$

NO es conmutativa

No podemos cambiar la posición del minuendo con la del sustraendo, porque tendríamos una respuesta diferente

$$5 - 2 \neq 2 - 5$$

NO es asociativa:

No se puede intercambiar el valor del minuendo con el del sustraendo

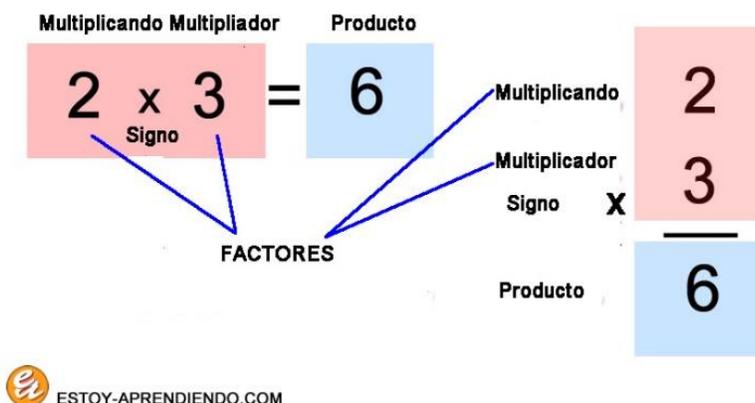
Elemento neutro

La resta de cualquier número y cero (0) es igual al mismo número, **PERO**, si la cifra del minuendo es menor que la del sustraendo, la respuesta será un número negativo, que será estudiado en el tema **Números enteros**

$$5 - 0 = 5$$

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Elementos de una multiplicación



Multiplicar dos números naturales consiste en sumar uno de los factores consigo mismo tantas veces como indica el otro factor.

Para multiplicar dos números de varias cifras colocamos el multiplicando y debajo el multiplicador, trazando una raya por debajo de ambos. La multiplicación se inicia de derecha a izquierda. De manera ordenada, se multiplica la primera cifra del multiplicador por cada una de las cifras del multiplicando. Las **unidades** de cada producto se van colocando debajo de la raya, en un estricto orden de derecha a izquierda. Cuando en la suma surgen valores mayores a las unidades (mayor de 9), las decenas se le suman a la multiplicación del siguiente dígito. Esta acción se repite con todos los productos entre el dígito del multiplicador y todos los dígitos del multiplicando. Cada vez que se cambia de dígito en el multiplicador, se escriben los nuevos productos debajo de la fila anterior, desplazadas un lugar hacia la izquierda.

Al terminar de multiplicar la última cifra del multiplicador por todas las del multiplicando, trazamos una raya debajo de la última fila (tenga en cuenta se habrán tantas filas como dígitos tenga el multiplicador) y procedemos a sumar todas las filas. El resultado obtenido será el producto de la multiplicación.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 1225 \\
 \times 16 \\
 \hline
 7350 \quad (\text{Resultado de la multiplicación de 6 por 1125}) \\
 1225 \quad (\text{Resultado de la multiplicación de 1 por 1125, se dejó un espacio}) \\
 \hline
 19600 \quad (\text{Resultado de sumar } 7350 + 1225)
 \end{array}$$

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES

1. Operación interna
El resultado de la multiplicación de dos números naturales es otro número natural.
2. Asociativa

El modo de agrupar los factores no varía el resultado.

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Ejemplo:

$$(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5)$$

$$6 \cdot 5 = 2 \cdot 15$$

$$30 = 30$$

3. Conmutativa

El orden de los factores no altera el producto.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Ejemplo:

$$2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$$

$$10 = 10$$

4. Elemento neutro

El 1 es el elemento neutro de la multiplicación de números naturales porque todo número multiplicado por él da el mismo número.

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Ejemplo:

$$3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = 3$$

5. Distributiva

La multiplicación de un número natural por una suma es igual a la suma de las multiplicaciones de dicho número natural por cada uno de los sumandos.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Ejemplo:

$$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$$

$$2 \cdot 8 = 6 + 10$$

$$16 = 16$$

6. Factor común

Es la propiedad inversa a la propiedad distributiva.

Si varios sumandos tienen un factor común, podemos transformar la suma en producto extrayendo dicho factor.

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

Ejemplo:

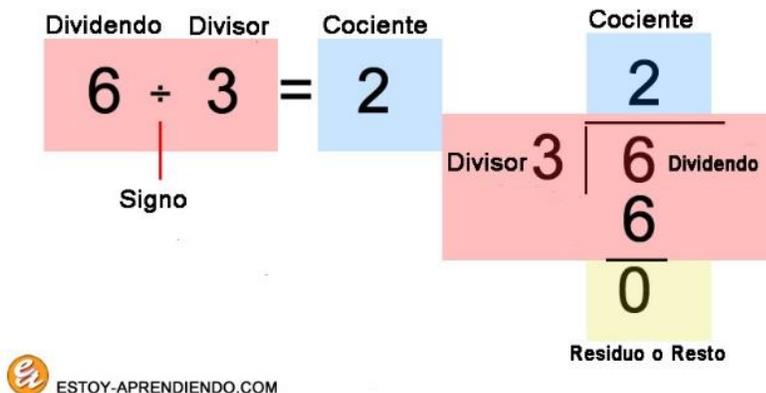
$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 2 \cdot (3 + 5)$$

$$6 + 10 = 2 \cdot 8$$

$$16 = 16$$

DIVISIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Elementos de una división



La división es la operación contraria de la multiplicación. Veamos con un ejemplo cómo se divide.

Calcular el cociente de 368 y 16, dividir 368 entre 16, $[368 \div 16]$, $\frac{368}{16}$

1	Se coloca el dividendo (368) debajo del signo de división y a su izquierda se escribe el divisor (16)	$16 \overline{)368}$
2	Se divide el primer número que "cabe" entre el divisor (3 no cabe entre 16, por lo que se toma el número que se conforma con el siguiente dígito 36). El número entero que resulta de la división se coloca en la parte superior del signo de división, iniciando en el último dígito del número tomado $36 \div 16 = 2$	$16 \overline{)368} \begin{matrix} 2 \\ \end{matrix}$
3	A continuación se multiplica el entero resultante por el divisor y se coloca debajo de la cifra que se utilizó para dividir. $2 \times 16 = 32$	$16 \overline{)368} \begin{matrix} 2 \\ 32 \\ \end{matrix}$
4	Se pasa una raya y se restan las dos cifras. $36 - 32 = 4$	$16 \overline{)368} \begin{matrix} 2 \\ 32 \\ \hline 4 \end{matrix}$
5	A la diferencia de esta resta se le coloca, a su derecha, el siguiente dígito del dividendo.	$16 \overline{)368} \begin{matrix} 2 \\ 32 \\ \hline 48 \end{matrix}$

6	Se vuelve a realizar el paso 2 con este nuevo número. $48 \div 16 = 3$	$\begin{array}{r} 23 \\ 16 \overline{)368} \\ \underline{32} \\ 48 \\ \underline{48} \\ 0 \end{array}$
7	Se vuelve a realizar el paso 3. $3 \times 16 = 48$ Y se vuelve a realizar la resta $48 - 48 = 0$	$\begin{array}{r} 23 \\ 16 \overline{)368} \\ \underline{32} \\ 48 \\ \underline{48} \\ 0 \end{array}$
Cuando no queden más dígitos del dividendo por agregar, se ha terminado la división, pudiendo dar dos resultados de acuerdo a la diferencia de la última resta:		
	1. La diferencia es 0: la división es EXACTA. No tiene resto.	<p style="text-align: center;">División exacta</p> $\begin{array}{r} 3 \\ 5 \overline{)15} \\ \underline{15} \\ 0 \end{array} \quad 15 = 5 \cdot 3$ <p style="text-align: right;"><i>0</i> ← <i>No hay resto</i></p>
	2. La diferencia es mayor de 0: esa diferencia es el RESTO o RESIDUO y se dice que la división no es exacta. Se puede continuar colocando un punto decimal a la derecha del cociente hallado y agregar ceros al residuo para continuar con la división decimal que estudiaremos en otro capítulo.	<p style="text-align: center;">División con residuo</p> $\begin{array}{r} 3 \\ 5 \overline{)17} \\ \underline{15} \\ 2 \end{array} \quad 15 = 5 \cdot 3 + 2$ <p style="text-align: right;"><i>2</i> ← <i>Residuo o Resto</i></p>

PROPIEDADES DE LA DIVISIÓN DE NÚMEROS NATURALES

1. No es una operación interna
El resultado de dividir dos números naturales no siempre es otro número natural.
Ejemplo:
 $2 : 6 \notin \mathbb{N}$

2. No es conmutativa
El modo de agrupar los factores varía el resultado.
 $a \div b \neq b \div a$
Ejemplo:

$$\frac{6}{2} \neq \frac{2}{6}$$

3. El cociente de cero y cualquier número es cero

Ejemplo: $\frac{0}{a} = 0$ $\frac{0}{5} = 0$

PERO, el cociente de cualquier número y 0 es INDEFINIDO.

$$\frac{a}{0} = \textit{indefinido} \qquad \frac{5}{0} = \textit{indefinido}$$

REDONDEO DE NÚMEROS NATURALES. REGLAS

En nuestras conversaciones cotidianas raramente expresamos los números de manera exacta. Es muy común escuchar: “Me costó ‘cuarenta y pico” (le había costado realmente \$43), “Cuesta uno” (El precio que tiene el artículo es \$0.95), “Está a unas 50 millas” (Realmente a 47 millas). Esto obedece a que decir la cantidad exacta no es relevante, por lo que la aproximamos a un número fácil de decir y recordar. Redondear también es útil para ver si un cálculo es razonable. Por ejemplo, necesitamos saber rápidamente si el dinero del que disponemos nos alcanza para realizar una compra, aproximamos los números para realizar operaciones rápidas y comparar con nuestro presupuesto.

Estas son las reglas para redondear números enteros:

1. Identifica el dígito que quieres redondear. Puedes marcar o encerrar en un círculo el dígito para que no lo pierdas de vista.

1 2 6

2. A continuación determina los posibles números que podrías obtener al redondear.

1 2 0 1 3 0

Estos números se acercan al número que estas redondeando, pero tienen ceros en los dígitos a la derecha. Ten en cuenta que $120 < 126 < 130$

3. Al ver el dígito que está a la derecha (6) del que queremos redondear, analizamos las siguientes posibilidades:
 - a) Si es **5 o mayor**, aumentamos un número al dígito (2+1), en este caso el número redondeado sería 130.
 - b) Si es **4 o menor**, dejamos el dígito como está (2), en este caso el número redondeado sería 120.

En el ejemplo, al ser el dígito $6 > 5$, sumamos 1 al 2 y obtendremos como resulta 130