フランジ継手構造系の解析手法〔2〕

日立造船株式會社
装置配管計画部主任部員
大 窪 厚 男
Atsuo Okubo

日立造船株式會社
装置配管計画部
(現CRC株式会社勤務)
有 本 享 三
Kyozo Arimoto

Equilibulium equation and solition technique

3.4 全体平衡方程式とその解法

3.4.1 全体平衡方程式の作成

Assemble of equation

未知の積分定数とガスケット・ボルト内力を求めるためには，まず前節で導いた境界条件式にフランジ継手の各部に対してすでに節3.2で得られた変位，回転，モーメントおよびせん断力に関する式を代入する．その結果，前節の表1に示した42個の式のそれぞれに対し，未知量に関する式がやはり42個求まることになる．これらの42個の式を含む連立方程式はマトリックス・ベクトル表示を用いることによって，以下のように簡略的に記すことができる．

$$[A]\{C\}=\{B\} \tag{43}$$

ここで，$[A]$を係数マトリックス，$\{B\}$を荷重パラメータベクトル，$\{C\}$を積分定数ベクトルと呼ぶことにする．式(43)の連立方程式は付録2で具体的に示される．

さて，係数マトリックス$[A]$と荷重パラメータベクトル$\{B\}$の成分がすべて既知であれば，式(43)の連立方程式を解くことによって積分定数ベクトル$\{C\}$が求まることになる．ただし，ガスケットの非線形性を考慮する場合には一回でベクトル$\{C\}$を求めることができなくなり，ニュートンラプソン法に基づく次式によって繰り返し計算を行うことになる．

$$[A^{(i)}]\{\Delta C^{(i+1)}\}=\{B\}-\{D^{(i)}\}\quad(i=0\sim N) \tag{44}$$

$$\{C^{(i)}\}=\sum_{i=1}^{i}\{\Delta C^{(i)}\} \tag{45}$$

ここで，iは繰り返し計算回数のカウンタである．右上付き添字(i)，(i+1)が付くマトリックス・ベクトルは繰り返し計算ごとに変化するものである．ベクトル$\{D^{(i)}\}$は式(45)で求まった積分定数ベクトル$\{C^{(i)}\}$の状態に対応する等価荷重パラメータベクトルであり，これと荷重パラメータ$\{B\}$との差に対して積分定数の増分ベクトル$\{\Delta C^{(i+1)}\}$が得られる．この増分ベクトルの相対的な変化が指定した許容値より小さくなると解が収束したと見成される．そして，収束時の積分定数ベクトルは式(45)によって求まる．以下の項では，初期締め付け状態と使用状態における解析の流れをもうすこし具体的に述べることにする．

3.4.2 初期締め付け状態

Bolt tightening phase

フランジ継手のボルトに対して単に適切な締め付けを行ったのが，初期締め付け状態である．この場合の荷重はボルトの長さを強制的に短かくすることに相当する．しかし，この量を具体的に求めることはむずかしく，実際にはトルクレンチを用いてボルトに発生する内力を推定するしかない．したがって，初期締め付け状態ではボルト内力が既知であり，それを荷重として与えた場合の変形を求めることになる．

以上のように考えることは，図3においてボルトに相当するバネを取り除き，ボルト中心円上にボルト内力を荷重として分布させることである．数式的には表1内の境界条件式(39)を考慮せず，またボルト内力を既知量として取り扱うことになる．この結果，式(43)，(44)におけるマトリックス[A]，ベクトル{C}，{B}，{D}は変更されることになる．特に，荷重パラメータベクトル{B}には既知のボルト内力に関する成分が含まれる．

さて，指定されたボルト内力が発生しているフランジ継手に対しては，継手の材料がすべて弾性体であるならば式(43)を解くことによって積分定数とガスケットバネの内力が得られる．しかし，今回はガスケットの非線形性を取り扱うため，式(44)に基づく繰り返し計算を行う必要がある．まず，$i=0$の計算を行うが，これは式(43)を解くことと同じである．その結果として求まるベクトル{C}が，式(45)における$\{C^{(1)}\}$に対応する．この場合，係数マトリックス$[A^{(0)}]$の成分として含まれるガスケットのバネ定数は，無負荷時における応力ひずみ曲線の接線勾配$E_{gi}^{(0)}$を用いて求めたものである．したがって，求まった積分定数ベクトル$\{C^{(1)}\}$はあくまで近似値である．

そこで，さらに真の値に近づけるためには，まずベクトル$\{C^{(1)}\}$に対応する変形状態でガスケットの$E_{gi}^{(1)}$を求め，新しい係数マトリックス$[A^{(1)}]$を求める．また，この状態における等価荷重パラメータベクトル$\{D^{(1)}\}$を求めておく必要がある．このベクトル$\{D^{(1)}\}$は本来荷重パラメータベクトル{B}と平衡するべきものであるが，ガスケットの非線形性のためにベクトル$\{C^{(1)}\}$の状態では一致しない．$\{D^{(1)}\}$を求めるのは，基本的には式(43)において逆に{B}を求めるのと同じ処理である．すなわち，まず[A]の線形成分$[A^L]$と$\{C^{(1)}\}$との乗算を行うことにより，次のように$\{D^{L(1)}\}$を求める．

$$[A^L]\{C^{(1)}\}=\{D^{L(1)}\} \tag{46}$$

ただし，非線形項〔付録2の式(20)，(24)，(28)に含まれる$-F_{gi}/2\pi$，および式(40)，(41)，(42)に含まれる$U_{gi}=(1/k_{gi}+1/k_{ri})F_{gi}$〕については，項3.2.2で述べたガスケットの非線形特性より直接求め$\{D^{L(1)}\}$に加算する（$F_{gi}^{(1)}$は応力－ひずみ曲線より求め，$U_{gi}^{(1)}$は$W_P^{i(1)}$と等しいとする）．このような処理によって$\{D^{(1)}\}$が得られる．

さて，$[A^{(1)}]$，$\{D'\}$が求まったので，式(44)から次の積分定数の増分ベクトル$\{\Delta C^{(2)}\}$が得られ，さらに式(45)より$\{C^{(2)}\}$が求まる．以降の処理は前に述べたものを繰り返すことになる．ただし，計算の過程においてガスケットバネの内力が引張り側となる場合，実際にはフランジ面とガスケットとが分離することに相当するので対応するガスケットバネの内力をゼロとし，さらにバネ定数を無視する．このようにしてガスケットの接触問題が取り扱われる．

3.4.3 使用状態 Operational phase

フランジ継手の使用状態では，ボルト締めされた状態にさらに内圧あるいは温度分布が加わる．このような状態を解くには，ボルトを含めたモデルを取り扱う必要がある．そこで，ボルトを除いている初期締め付け状態のモデルとの間にまず連続性を確立しておかねばならない．このためには，最終的に得られた初期締め付け状態の積分定数ベクトル$\{C^{TF}\}$より，ボルトを含んだモデルでの荷重パラメータベクトル$\{B^{TF}\}$を求める．このベクトルを求めるには前項でベクトル{D}を計算した際と同じ手法を用いる．ただし，今回はボルトに関する式と未知量を含んだ連立方程式を取り扱うことになる．使用状態における荷重パラメータベクトルは，内圧，温度分布に対して付録2より求まるものにベクトル$\{B^{TF}\}$を加算することによって得られる．

使用状態における変形を解く場合にもガスケットの非線形性を考慮する際には式(44)，(45)によって繰り返し計算を行う．ガスケットの材料非線形については，初期締め付け状態と同じ取り扱いとなる．ただし，フランジ面とガスケットとの分離は，ガスケットの接触面圧が流体の内圧より小さくなる際に生じるという条件となる．このような条件が成立する場合，そのガスケットバネの位置までに内部流体が浸透し荷重条件が変化する．たとえば，図3において$r=g_1$の位置まで流体が浸透したとすると，付録2の式(13)，(14)，(15)，(16)の右辺の項がすべてゼロとなり，その代りに付録2の式(17)，

(18), (19), (20)のそれぞれの右辺に以下の項が現れることになる．

$$\frac{g_1^4 p}{64 D_r}\ ,\ \frac{g_1^3 p}{16 D_r}\ ,\ \frac{g_1^2 p}{16 D_r}(3+\nu)\ \ ,\ -\frac{g_1 p}{2}$$

このように，使用状態において流体の浸透が生じる場合には，繰り返し計算中に荷重パラメータベクトルが変化することになる．

4．プログラムの開発と解析例 Development of Program and Sample Problem

4.1 プログラムの開発 Deveropment of program

前章で述べた解析手法に基づき，フランジ継手構造系の漏えいに関するプログラムFSAP（Flange Sealing Analysis Program）を開発した．FSAPプログラムにおける処理の流れを概略的に示すと図5のようになる．プログラムの処理は初期締め付け状態と使用状態とに大きく分けられる．各状態での荷重はステップ状に加えられ，それぞれのステップに対してガスケットの非線形性に基づく繰り返し計算が行われる．式(44)の連立方程式を解くのには，ガウスの消去法が用いられている．

プログラムはFORTRAN 77で組まれ，その大きさは3400行程度である．計算時間はガスケットバネ数が20，ステップ数が12でそれぞれのステップにおける繰り返し計算回数が3回程度の場合，HITAC M280Hで約6秒であった．

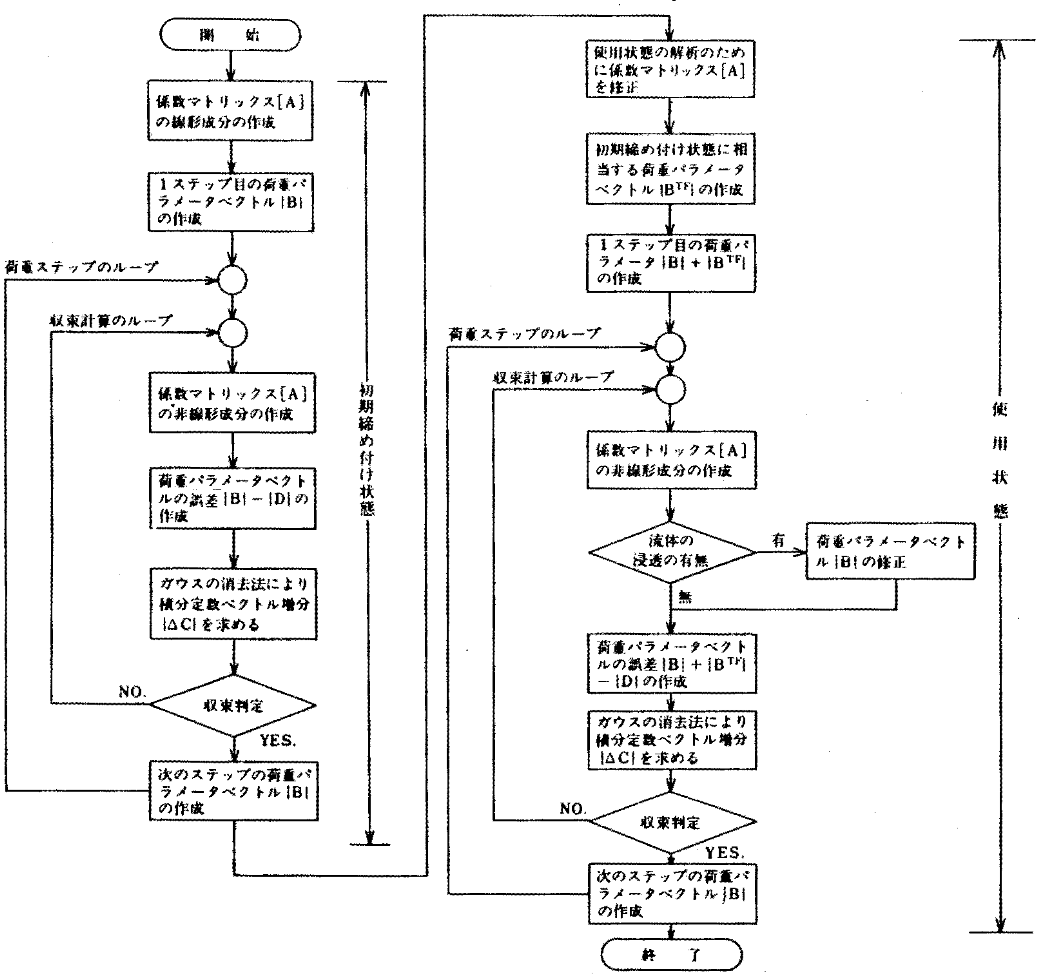

図5

Fig.5 Flow chart of FSAP program

本プログラムでは，50項目程度の入力データを用意すればよく，有限要素法で必要となるメッシュ分割のような前処理は行わなくともよい．したがって，種々の形状寸法および荷重条件に対するパラメトリックな解析に適している．

なお，本プログラムではフランジ本体に発生する応力（パイプとハブ，ハブとリングの接続点などの位置）についても，軸方向および円周方向に対し内・外面において計算される．また，ハブ無しフランジ継手に関する解析も可能である．ハブ無しフランジの場合，パイプとリングが直接接続したモデルとして取り扱われる．

4.2 解析例 Sample problem

4.2.1 フランジの変形 Deformation of flange

フランジ継手の変形がFSAPプログラムによってどの程度の精度で得られているかについて検証するため，有限要素法による詳細な解析との比較を行った．比較のためのフランジ継手は今回漏えい実験を行うために製作されたものでANSI B16.5 Class600，4 inのSUS 304製である．なお，この実験装置については次報で詳細に述べる．

ボルト内力が18,519kgの初期締め付け状態におけるフランジ本体の変形量を比較したものを図6に示す．この場合，アルミ製ガスケットが用いられており，FSAPプログラムおよび有限要素法モデルの両方とも，1つのバネとしてこれを取り扱っている．なお，有限要素法プログラムとしてNONSAP[15]を用い，フランジ本体を図7に示すように二次元軸対称要素で分割している．

フランジリング中立面の変形に対するFSAPプログラムと有限要素法プログラムとの結果は，全体的に0.003～0.006mm程度の差があるが曲線の形状はよく一致している．この全体的な差は，有限要素法ではリングの厚さ方向の変形も当然考慮することになるが，FSAPプログラムによる今回の計算ではこれを無視したことが原因であると考えられる．

4.2.2 ボルト内力の変化 Change of bolt force

前項で述べた実験装置において，内圧を段階的に負荷していった際のボルト内力の変化をFSAPプログラムによって求め，実験結果と比較したものを図8に示す．この実験ではガスケットとしてテフロン系の製品であるバルカロン®（バルカーNo.7020外径157.2mm，内径114.3mm，厚さ3mm）を用いた．このフランジ構造系では内圧を負荷することによってボルト内力も増加する．実験は内圧60kg/mm²まで行われており，内圧とボルト内力の変化との関係には若干の非線形性が含まれている．

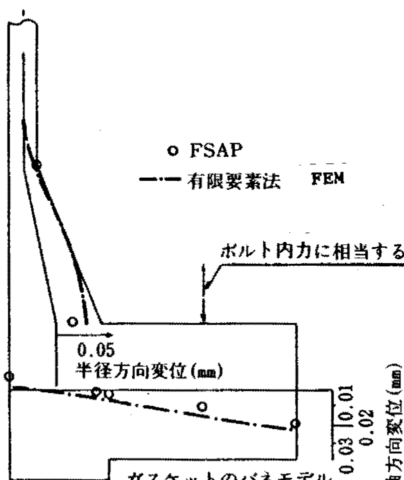

図6 フランジ継手の変形
（FSAPと有限要素法との比較）
Fig.6 Deformation of flange

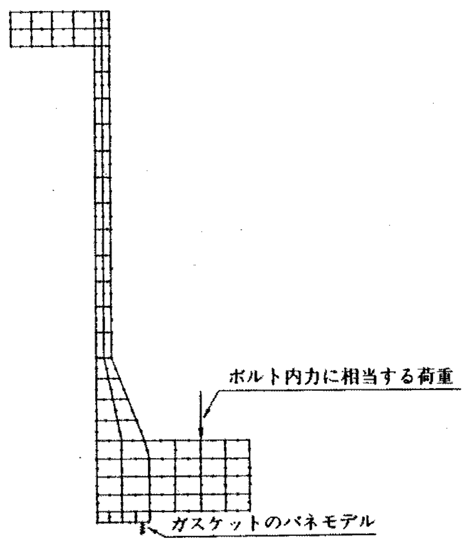

図7 有限要素法におけるモデル化
Fig.7 FEM model of flange

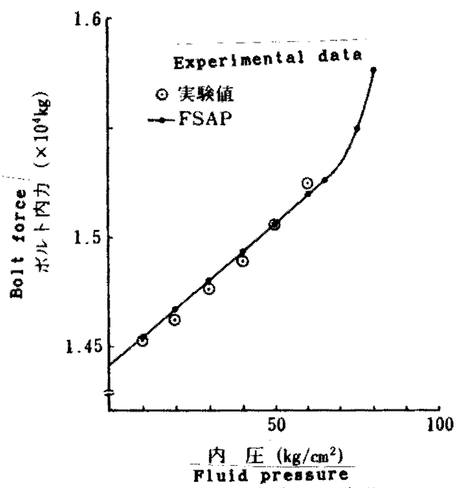

図8 ボルト内力の変化
Fig.8 Variation of bolt force

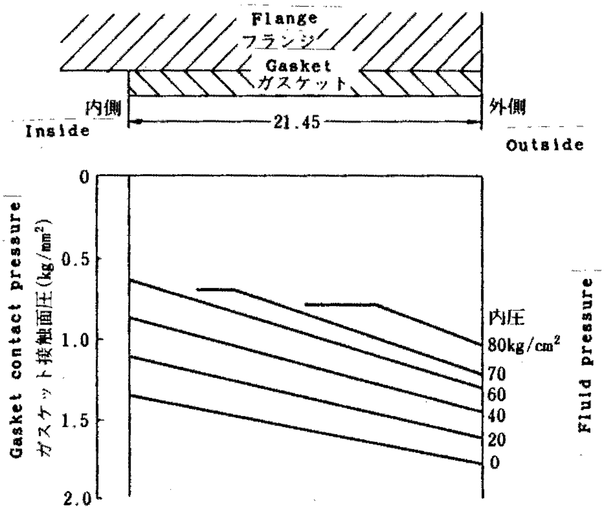

図9 内圧負荷時における接触面圧分布の変動（ガスケット20バネモデル）
Fig.9 Variation of contact pressure distribution

さて，ＦＳＡＰプログラムの結果では，内圧65 kg/cm²付近まではボルト内力は線形に変化するがそれを超えると急に値が上昇する．この急上昇は次項で明らかになるが，ガスケット接触面に内部流体が浸透するためである．また，内圧65kg/cm²以下において実験値が非線形性を示すのにFSAPプログラムによる結果がほとんど線形なのは，この解析ではガスケット材料の非線形性を考慮していないためであると考えられる．今回の解析ではガスケットのヤング率が，負荷時150 kg/mm²，除荷時250 kg/mm²のそれぞれ一定値であると仮定されている．

4.2.3 ガスケット接触面圧の分布 Distribution of gasket cotact pressure

本解析手法およびFSAPプログラムでは，ガスケット接触面圧の分布がいかに簡易的かつ効率的に推定できるかを重視している．前項で述べた内圧を段階的に負荷されたフランジ継手において，ガスケット接触面圧の分布の変動をFSAPプログラムで求めた結果を図９に示す．

接触面圧の分布は，内圧０kg/cm²の初期締め付け状態において内側より外側の方が大きな値となるほぼ線形な曲線である．内圧が負荷されると接触面圧の分布曲線は平行移動するように低下していく．内圧が70kg/cm² になると，ガスケットの内面から幅の⅓程度の領域までは面圧が内圧より小さくなり内部流体が浸透するものと推定できる．

本プログラムで計算された接触面圧はあくまで平均的な値である．本来，フランジ面およびガスケット面は粗さを持ち，微視的には不均一な面圧分布となっている．したがって，本プログラムで接触面圧が内圧より大きくなる領域においても，一部流体が浸透しているものと考えられる．

さて，第2章で述べたように文献10)においては有限要素法によってガスケット接触面圧分布が得られている．これと全く同一の条件でFSAPプログラムにより接触面圧分布を求め文献10)と比較したものを初期締め付け状態に対して図10，内圧100 kg/cm²の使用状態に対して図11に示す．このフランジ継手ではガスケットの材質をフランジ本体と同じ鋼製としている．そのため，接触面圧の値が大きくなりフランジ面側の局部的な変形を無視できないと考えられるので，フランジリングの厚さ方向の変形をモデル化したバネのバネ定数としてガスケットバネと同一の値を設定した．

図10および図11のいずれにおいても，FSAPプログラムによって求められた接触面圧の分布は有限要素法による結果と厳密には一致しているとはいえない．これは，FSAPプログラムではガスケットおよびフランジ面の変形を単純なバネとして仮定しているためであると考えられる．この例のようにフランジ本体とガスケットとが同一の材料

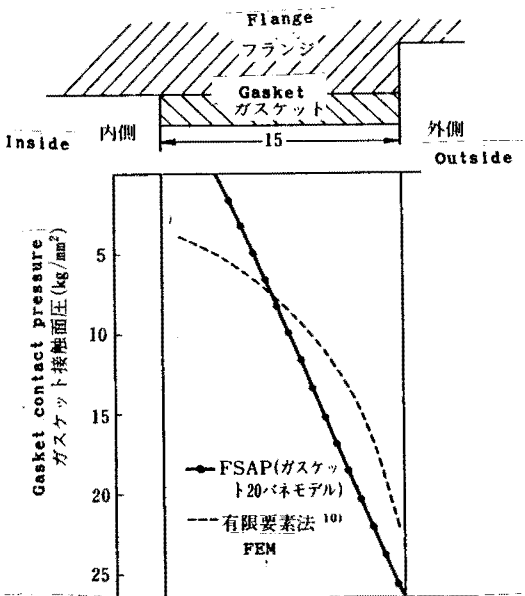

Fig.10 Contact pressure distribution at bolt tightening phase

図10 初期締め付け状態における接触面圧分布（ボルト内力161,900kg）

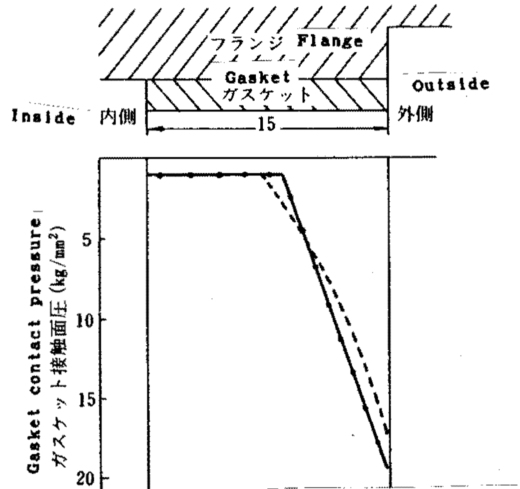

Fig.11 Contact pressure distribution at operating phase

FSAP(ガスケット20バネモデル)

有限要素法 10) FEM

図11 使用状態における接触面圧分布（ボルト内力161,900kg）

である場合には，接触面が複雑な変形状態となり単純なバネによるモデル化では限界がある．ただし，接触面圧の分布の傾向はFSAPプログラムの結果からでも十分に把握することが可能である．特に，使用状態における流体の浸透領域の範囲については図11より，かなり明確に推定することができると考えられる．

なお，文献10)におけるモデルは第2章で述べたようにボルトを含んでおらず，使用状態においてもボルト内力が既知であるとし，それを荷重として加えている．今回，FSAPプログラムによる解析を行った結果，使用状態においてボルト内力が161,900 kgであるためには，初期締め付け状態において175,800 kg程度のボルト内力が必要であることが明らかとなった．このフランジで継手では項4.2.2 で示したものと異なり，内圧の負荷によってボルト内力が低減することになる．

5. あ と が き
Conclusion

フランジ継手の漏えい特性を定量的に把握するための研究の一環として，継手構造系の解析手法の確立とそのプログラム化を行った．本解析手法とプログラムの特徴をまとめると以下のようになる．

(1) ASMEコードとの親密性を保っている．

(2) ガスケット接触面圧の分布状態を簡単に推定できる．

(3) 入力データの作成が容易で計算時間が短かいためパラメトリックな解析が可能である．

さて，フランジの漏えい現象は非常に多くの要因に影響されるものである．本解析手法およびプログラムによって明らかとなる接触面圧分布は最も大きな因子ではあるが，あくまで一つの要因であることに注意すべきである．他の因子についてもこの接触面圧分布に関係付けられるものが多いが，これらは実験によって解明されるものである．今後は，解析と実験の両方のデータを蓄積していくことによって，確実性の高い漏れ防止手法を確立することが可能であると考える．

終りに，プログラムの開発に関して協力いただいた日立造船情報システム㈱の田中直通氏に謝意を表す．

References
参考文献

15) Bathe, K.J., Wilson, E.L., and Iding, R., "NONSAP-A Sructural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Nonlinear Systems", SESM Report No. 74-3, University of California, Berkeley, 1974.

Appendix 2 Equilibulium equation
付録2　全体平衡方程式

本文の式(43)で示されたマトリックス・ベクトル表示の連立方程式を以下では具体的に記すことにする．式の番号は本文の表1（前月号）に示した境界条件式の番号に対応している．

(a)パイプとハブの接続点

$$-\Psi_0^{1/2}C_2'+b_1^0C_3+b_2^0C_4+b_3^0C_5+b_4^0C_6=\Psi_0^{1/2}\varepsilon_f(T_h-T_p) \qquad (1)$$

ここで，Ψの右下付き添字とbの右上付き添字の0は$x=0$における値であることを示す．また，$C_2'=C_2/d$である．

$$-\frac{\eta_0\Psi_0^{1/2}}{\sqrt{2}}C_1'-\frac{\eta_0\Psi_0^{1/2}}{\sqrt{2}}C_2'+b_5^0C_3+b_6^0C_4+b_7^0C_5+b_8^0C_6=-2\Psi_0^{1/2}p^* \qquad (2)$$

ここで，η_0，C_1は以下の通りである．

$$\eta_0=2\gamma\left(\frac{\Psi_0}{\alpha}\right)^{1/2}$$

$$C_2'=C_2/d$$

$$-\eta_0^2\Psi_0^{1/2}C_1'+b_9^0C_3+b_{10}^0C_4+b_{11}^0C_5+b_{12}^0C_6=8\Psi_0^{1/2}p^* \qquad (3)$$

$$-\frac{\eta_0\Psi_0^{1/2}}{\sqrt{2}}C_1'+\frac{\eta_0\Psi_0^{1/2}}{\sqrt{2}}C_2'+b_{17}^0C_3+b_{18}^0C_4+b_{19}^0C_5+b_{20}^0C_6=0 \qquad (4)$$

(b)ハブとリングの接続点

$$(b_1^1+U_1b_5^1-U_2U_3b_{17}^1)C_3+(b_2^1+U_1b_6^1-U_2U_3b_{18}^1)C_4+(b_3^1+U_1b_7^1-U_2U_3b_{19}^1)C_5+(b_4^1+U_1b_8^1-U_2U_3b_{20}^1)C_6=\frac{\Psi_1^{1/2}}{d}\left\{\frac{dp^*}{\rho}-U_3p-U_4-\varepsilon_f(T_r-T_h)e\right\} \qquad (5)$$

式(5)において，bの右上付き添字およびΨの右下付き添字の1は$x=h$における値であることを示す．また，$U_1\sim U_4$，ρは以下に定義される．

$$U_1=\frac{t}{4\Psi_1h},\quad U_2=\frac{D_h\eta_1^2}{8\Psi_1^3h^3t}$$

$$U_3=\frac{b^2}{E_f(a^2-b^2)}\left\{(1-\nu)e+\frac{(1+\nu)a^2}{e}\right\},$$

$$U_4=\frac{td\alpha p^*}{2h(1+\alpha)^2}$$

$$\rho=1+\alpha,\quad \eta_1=2\gamma\left(\frac{\Psi_1}{\alpha}\right)^{1/2}$$

$$b_5^1C_3+b_6^1C_4+b_7^1C_5+b_8^1C_6-\frac{2\Psi_1^{3/2}h(2e\ln e+e)}{d}C_7^1-\frac{4\Psi_1^{3/2}he}{d}C_8^1-\frac{2\Psi_1^{3/2}h}{de}C_9^1=-\frac{2\Psi_1^{1/2}}{\rho}p^*-\frac{e^3p\Psi_1^{3/2}h}{8D_rd} \qquad (6)$$

ここで，C_7，C_8，C_9の右上付き添字の1はリングの部分Iに対するものであることを示す．以下で現れる部分II～Vについても同様な表示を行う．

$$(b_9^1+U_5b_{17}^1)C_3+(b_{10}^1+U_5b_{18}^1)C_4+(b_{11}^1+U_5b_{19}^1)C_5+(b_{12}^1+U_5b_{20}^1)C_6-U_6[2(1+\nu)\ln e+(3+\nu)]C_7^1-2U_6(1+\nu)C_8^1+\frac{U_6(1-\nu)}{e^2}C_9^1+U_6[2(1+\nu)\ln e+(3+\nu)]C_7^2+2U_6(1+\nu)C_8^2-\frac{U_6(1-\nu)}{e^2}C_9^2=\frac{8\Psi_1^{1/2}}{\rho}p^*$$

ここで，U_5，U_6は以下で定義するものである．

$$U_5=\frac{\eta_1^2t}{4\Psi_1h},\quad U_6=-\frac{4\Psi_1^{5/2}h^2D_r}{D_hd}$$

(c)リングI

$$[2(1+\nu)\ln b+(3+\nu)]C_7^1+2(1+\nu)C_8^1-\frac{(1-\nu)}{b^2}C_9^1=\frac{b^2p}{16D_r}(3+\nu) \qquad (8)$$

$$\frac{4D_r}{b}C_7^1=\frac{bp}{2} \qquad (9)$$

(d)リングI－リングII

$$e^2\ln e\cdot C_7^1+e^2C_8^1+\ln e\cdot C_9^1+C_{10}^1-e^2\ln e\cdot C_7^2+e^2C_8^2-\ln e\cdot C_9^2-C_{10}^2=0 \qquad (10)$$

$$(2e\ln e+e)C_7^1+2eC_8^1+\frac{1}{e}C_9^1-(2e\ln e+e)C_7^2-2eC_8^2-\frac{1}{e}C_9^2=0 \qquad (11)$$

$$-\frac{4D_r}{e}C_7^1+\frac{4D_r}{e}C_7^2=-\frac{b^2p}{2e} \qquad (12)$$

(e)リングII－リングIII$_1$

$$f^2\ln f\cdot C_7^2+f^2C_8^2+\ln f\cdot C_9^2+C_{10}^2-f^2\ln f\cdot C_7^{3,1}-f^2C_8^{3,1}-\ln f\cdot C_9^{3,1}-C_{10}^{3,1}=\frac{f^4p}{64D_r} \qquad (13)$$

$$(2f\ln f+f)C_7^2+2fC_8^2+\frac{1}{f}C_9^2-(2f\ln f+f)C_7^{3,1}-2fC_8^{3,1}-\frac{1}{f}C_9^{3,1}=\frac{f^3p}{16D_r} \qquad (14)$$

$$[2(1+\nu)\ln f+(3+\nu)]C_7^2+[2(1+\nu)]C_8^2-\frac{(1-\nu)}{f^2}C_9^2$$

$$-[2(1-\nu)\ln f+(3+\nu)]C_7^{3,1}-[2(1+\nu)]C_8^{3,1}$$

$$+\frac{(1-\nu)}{f^2}C_9^{3,1}=\frac{f^2p}{16D_r}(3+\nu) \quad (15)$$

$$-\frac{4D_r}{f}C_7^2+\frac{4D_r}{f}C_7^{3,1}=-\frac{fp}{2} \quad (16)$$

以上の式で$C_7^{3,1}$などの右上付き添字3,1はリングIII_1に対するものであることを示す．リングIII_2，III_3などについても同様の表示を用いる．

(f)リングIII_i－リングIII_{i+1}（i＝1～3)

標記の三つの接続点に対して得られる式は同一の形式となる．そこで，添字 i を用い各量の区別を行う．今回はバネが3個であるので i ＝1～3であるが，バネがN個の場合 i ＝1～Nとなる．

$$g_i^2\ln g_i\cdot C_7^{3,i}+g_i^2C_8^{3,i}+\ln g_i\cdot C_9^{3,i}+C_{10}^{3,i}$$
$$-g_i^2\ln g_i\cdot C_7^{3,i+1}-g_i^2C_8^{3,i+1}-\ln g_i\cdot C_9^{3,i+1}-C_{10}^{3,i+1}=0 \quad (17),\ (21),\ (25)$$

$$(2g_i\ln g_i+g_i)C_7^{3,i}+2g_iC_8^{3,i}+\frac{1}{g_i}C_9^{3,i}$$
$$-(2g_i\ln g_i+g_i)C_7^{3,i+1}-2g_iC_8^{3,i+1}-\frac{1}{g_i}C_9^{3,i+1}=0 \quad (18),\ (22),\ (26)$$

$$[2(1+\nu)\ln g_i+(3+\nu)]C_7^{3,i}+[2(1+\nu)]C_8^{3,i}-\frac{(1-\nu)}{g_i{}^2}C_9^{3,i}$$
$$-[2(1+\nu)\ln g_i+(3+\nu)]C_7^{3,i+1}-[2(1+\nu)]C_8^{3,i+1}+\frac{(1-\nu)}{g_i{}^2}C_9^{3,i+1}=0 \quad (19),\ (23),\ (27)$$

$$-4D_rC_7^{3,i}+4D_rC_7^{3,i+1}-\frac{Fg_i}{2\pi}=0 \quad (20),(24),(28)$$

(g)リングIII_4－リングⅣ

$$h^2\ln h\cdot C_7^{3,4}+h^2C_8^{3,4}+\ln h\cdot C_9^{3,4}+C_{10}^{3,4}$$
$$-h^2\ln h\cdot C_7^4-h^2C_8^4-\ln h\cdot C_9^4-C_{10}^4=0 \quad (29)$$

$$(2h\ln h+h)C_7^{3,4}+2hC_8^{3,4}+\frac{1}{h}C_9^{3,4}$$
$$-(2h\ln h+h)C_7^4-2hC_8^4-\frac{1}{h}C_9^4=0 \quad (30)$$

$$D_r[2(1+\nu)\ln h+3+\nu]C_7^{3,4}+2D_r(1+\nu)C_8^{3,4}-\frac{D_r(1-\nu)}{h^2}C_9^{3,4}$$
$$-D_r'[2(1+\nu)\ln h+3+\nu]C_7^4-2D_r(1+\nu)C_8^4+\frac{D_r'(1-\nu)}{h^2}C_9^4=0 \quad (31)$$

ここで，D_r'のダッシュはレイズドフェイスの厚さを含まないリング厚さに対するものであることを示す．

$$-\frac{4D_r}{h}C_7^{3,4}+\frac{4D_r'}{h}C_7^4=0 \quad (32)$$

(h)リングⅣ－リングⅤ

$$c^2\ln c\cdot C_7^4+c^2C_8^4+\ln c\cdot C_9^4+C_{10}^4$$
$$-c^2\ln c\cdot C_7^5-c^2C_8^5-\ln c\cdot C_9^5-C_{10}^5=0 \quad (33)$$

$$(2c\ln c+c)C_7^4+2cC_8^4+\frac{1}{c}C_9^4$$
$$-(2c\ln c+c)C_7^5-2cC_8^5-\frac{1}{c}C_9^5=0 \quad (34)$$

$$[2(1+\nu)\ln c+3+\nu]C_7^4+2(1+\nu)C_8^4-\frac{(1-\nu)}{c^2}C_9^4$$
$$-[2(1+\nu)\ln c+3+\nu]C_7^5-2(1+\nu)C_8^5+\frac{(1-\nu)}{c^2}C_9^5=0 \quad (35)$$

$$-4D_r'C_7^4+4D_r'C_7^5-\frac{F_b}{2\pi}=0 \quad (36)$$

(i)リングⅤ

$$[2(1+\nu)\ln a+3+\nu]C_7^5+2(1+\nu)C_8^5-\frac{(1-\nu)}{a^2}C_9^5=0 \quad (37)$$

$$C_7^5=0 \quad (38)$$

(j)リングⅤ－ボルトバネ

$$c^2\ln c\cdot C_7^5+c^2C_8^5+\ln c\cdot C_9^5+C_{10}^5+\left(\frac{1}{k_b}+\frac{1}{k_r}\right)F_b$$
$$=\varepsilon_f(T_r-T)\frac{t}{2}-\varepsilon_b(T_b-T)\frac{\ell}{2} \quad (39)$$

(k)リングIII_i－ガスケットバネ i（i＝1～3)

各接続点において得られる式は，添字 i を用いると同じ形式で記すことができる．バネがN個の場合には i ＝1～Nとなる．

$$g_i\ln g_i\cdot C_7^{3,i}+g_i^2C_8^{3,i}+\ln g_i\cdot C_9^{3,i}+C_{10}^{3,i}+\left(\frac{1}{k_{gi}}+\frac{1}{k_{ri}}\right)F_{gi}$$
$$=-\varepsilon_f(T_r-T)\frac{t}{2}-\varepsilon_g(T_g-T)\frac{v}{2} \quad (40),\ (41),\ (42)$$

さて，以上に示した42個の連立方程式が，本文において式(43)のようにマトリックス・ベクトル表示で表わされたものである．係数マトリックス[A]の成分は未知量C_i，F_b，F_{gi}に乗じられた係数である．積分定数ベクトルでは未知量C_i，F_b，F_{gi}が成分となる．また，荷重パラメータベクトルは連立方程式の右辺の項を成分として含ものである．

なお，初期締め付け状態の計算においては，本文で述べたように式(39)を省略する．また，内圧および温度分布が加わっていないので，右辺はすべてゼロである．ただし，ボルト内力F_bが既知であるので，式(36)のF_bに関する項が荷重パラメータとなり右辺に移項される．この結果，積分定数ベクトルにおける成分F_bが省略されることになる．