

CONTRIBUCION AL VI SEMINARIO VENEZOLANO DE MECANICA DE SUELOS. INTE-
RACCION SUELO - ESTRUCTURAS ENTERRADAS Y MUROS,
EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

POR: ING. GIANFRANCO PERRI A. (*).

Con mucho gusto he aceptado la invitación que me hiciera el Ing. Roberto Centeno de participar en calidad de panelista en esta sesión del VI Seminario Venezolano de Mecánica de Suelo, dedicada al tema de la Interacción Suelo - Estructuras enterradas y muros.

La invitación fue también muy explícita en el sentido del tema a tratar: El Método de los Elementos Finitos y sus aplicaciones en geotecnia. Finalmente una sola grandísima limitación: veinte minutos de tiempo para la exposición del tema.

Me encuentro así frente al dilema de escoger los aspectos a tratar, o mejor dicho a mencionar, en el utópico intento de lograr dar:

- a) una intuición física al procedimiento matemático, notablemente complejo, que está a base de la formulación del método;
- b) una idea de los alcances y limitaciones reales en las aplicaciones prácticas del método a problemas geotécnicos,
- c) unos ejemplos lo más posible representativos.

INTRODUCCION

Existen diferentes formas de enfocar el problema de la presentación del M.E.F., unas más rigurosas que otras, unas más intuitivas que otras. En el intento de simplificar al máximo el problema, y en consideración de las características del auditorio constituido probablemente en su totalidad por Ingenieros Civiles, se presentará el M.E.F. como una simple extensión del conocido método de los desplazamientos (o de rigideces)

(*). Profesor de Mecánica de Rocas en la Universidad Central de Venezuela.

usado, en su formulación matricial, para la resolución de problemas clásicos del análisis estructural.

El más simple elemento estructural en que se puede pensar, es una viga prismática con eje rectilíneo y sección constante. En el método de los desplazamientos se define para cada elemento estructural su "rigidez" que expresa la relación existente entre las fuerzas (o componentes de las fuerzas y los desplazamientos (o componentes de los desplazamientos) en los extremos o nodos del elemento. Haciendo por ejemplo referencia al mencionado elemento prismático la rigidez, que en la formulación matricial es justamente una matriz $| K |$, liga entre ellos los componentes de las fuerzas (una matriz vector $\{ F \}$, con 12 componentes en el caso más general: 6 para cada nodo), y los componentes de los desplazamientos en los extremos (otra matriz vector $\{ \delta \}$ con igual número de componentes). (Figura 1).

$$\{ F \} = | K | \{ \delta \} \quad (1)$$

Obviamente en unos casos particulares unas de las 144 (12 x 12) componentes de la matriz $| K |$, serán nulas; por ejemplo si los extremos del elemento son articulaciones en un sistema plano, podrán transmitir se solamente sollicitaciones axiales y los vectores fuerzas y desplazamientos tendrán respectivamente 4 componentes cada uno (2 para cada nodo) mientras que la rigidez $| K |$ será en una matriz 4 x 4.

Igual significado físico tiene la matriz de rigidez de una estructura compleja constituida por la unión de cierto número de elementos estructurales: representa la relación entre fuerzas y desplazamientos en todos los nodos de la estructura. Es fácil además demostrar que la rigidez de la estructura completa se obtiene mediante la simple y adecuada superposición o ensamblaje de las rigideces de todos los elementos que la constituyen; de manera que una vez que hayan sido definidas las rigideces de todos y cada uno de los elementos, es inmediata la deducción de la rigidez global de la estructura. (Figura 2).

Las incógnitas principales de un problema estructural analizado con el método de los desplazamientos son justamente los desplazamientos de la estructura (de los nodos de la estructura), de manera que una vez formulado en términos matriciales el problema cuya ecuación principal para toda estructura es:

$$\{ R \} = [K] \{ \delta \} \quad (2)$$

se trata de calcular el vector $\{ \delta \}$, para lo cual los pasos fundamentales necesarios son los siguientes:

- Calcular la matriz de rigidez de cada elemento.
- Ensamblar la matriz de rigidez de la estructura.
- Introducir en la ecuación fundamental (2) los valores conocidos de fuerzas y desplazamientos (condiciones de contorno) y calcular (mediante inversión de la matriz $[K]$) los desplazamientos incógnitos.
- Calcular las fuerzas internas en los nodos de la estructura para cada elemento $\{ F \}$, usando la relación (1).

EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

En una estructura continua (no constituida o sea por un ensamblaje de elementos estructurales interconectados por un número discreto de puntos nodales) el verdadero número de puntos de interconexión es infinito y es en consecuencia difícil ver a primera vista como pueden discretizarse problemas de este tipo y ser tratados en la forma descrita anteriormente.

El concepto de elementos finitos justamente supera esta dificultad mediante la suposición que el medio continuo real esté dividido en elementos ideales que cubren con su volumen todo el continuo, y que estén interconectados solamente en un número finito de puntos nodales en los cuales se supone actúen unas fuerzas ficticias, representativas de los esfuerzos que realmente actúan en forma distribuida sobre los

contornos de los elementos.

Una vez que se demuestre ser aceptable una tal idealización, resulta claro como el problema pueda reducirse al de una estructura convencional y luego pueda resolverse con la metodología ya expuesta. Es de este punto de vista que el M.E.F. puede considerarse como una simple extensión del método matricial de los desplazamientos.

Para relacionar los desplazamientos nodales con las mencionadas fuerzas ficticias aplicadas en los nodos (punto este seguramente crucial en la definición del método) se supone el sistema de desplazamientos en el interior de cada elemento definido en función de los desplazamientos nodales y luego se aplican los conocidos teoremas de variaciones.

CARACTERISTICAS DE UN ELEMENTO FINITO TRIANGULAR (*)

Al puesto que derivar las características para un elemento finito general, se prefiere para sencillez de presentación, derivar las características para un elemento plano de forma triangular lo que permitirá en todo caso tener una visión completa del procedimiento fácilmente extendible a elementos de formas superiores. Se toma en consideración un ejemplo sencillo de una estructura plana constituida por una plancha delgada y se divide la región en elementos triangulares.

* El contenido de este párrafo está resumido y esquematizado en el flujoograma de la figura 4 al que se envía para una consulta más rápida.

Se pasarán en reseña los pasos principales de la formulación del método que son:

- la función de los desplazamiento.
- la deformación y los esfuerzos.
- la rigidez y las fuerzas nodales.

a) La función de los desplazamientos.

La figura 3 muestra el elemento triangular típico considerado, con los nodos i, j, m, numerados en sentido antihorario.

Los desplazamientos de un nodo tienen dos componentes

$$\delta_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

y los seis componentes de los desplazamientos del elemento se agrupan en un vector

$$\{ \delta \}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix}$$

Los desplazamientos interiores a un elemento han de quedar definidos unívocamente por esos seis valores. La representación más sencilla viene dada evidentemente por dos polinomios de primer grado.

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

$$v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$$

Se pueden calcular fácilmente las seis constantes α resolviendo los dos sistemas de tres ecuaciones simultáneas que se obtienen al sustituir las coordenadas de los nodos e igualar las expresiones resultan

tes a los desplazamientos correspondientes a los nodos. Escribiendo por ejemplo:

$$u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i$$

$$u_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j$$

$$u_m = \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m$$

Se puede calcular fácilmente α_1, α_2 y α_3 en función de los desplazamientos nodales u_i, u_j y u_m para obtener finalmente:

$$u = \frac{1}{2A} \{ (a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_m + b_m x + c_m y) u_m \}$$

donde:

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j$$

$$b_i = y_j - y_m = y_{jm}$$

$$c_i = x_m - x_j = x_{mj}$$

obteniéndose los otros coeficientes mediante permutación cíclica de los subíndices i, j, m , y donde:

$$2A = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} = 2 \text{ (área del triángulo } ijm)$$

Puesto que las ecuaciones para el desplazamiento vertical son similares, se obtiene igualmente que

$$v = \frac{1}{2A} \{ (a_i + b_i x + c_i y) v_i + (a_j + b_j x + c_j y) v_j + (a_m + b_m x + c_m y) v_m \}$$

En términos matriciales puede escribirse

$$\{U\}^e = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}^e = [N] \{\delta\}^e$$

siendo $[N]$ la matriz de función de desplazamiento; ésta así como ha sido elegida en este caso, garantiza automáticamente la continuidad de desplazamientos entre elementos adyacentes al imponer los mismos desplazamientos en los nodos para dos elementos contiguos.

b) La deformación y los esfuerzos.

La deformación total en cualquier punto del elemento puede definirse mediante sus tres componentes que contribuyen al trabajo interno:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & , & 0 \\ 0 & , & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} & , & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [L] \{U\}$$

Sustituyendo en esta la ecuación anterior se obtiene:

$$\{\epsilon\} = [L] [N] \{\delta\} = [B] \{\delta\}$$

siendo $[B]$ la matriz de deformaciones dada por:

$$[B] = [L] [N] = \begin{bmatrix} \frac{\delta N}{\delta x} & , & 0 \\ 0 & , & \frac{\delta N}{\delta y} \\ \frac{\delta N}{\delta y} & , & \frac{\delta N}{\delta x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b & , & 0 \\ 0 & , & c \\ c & , & b \end{bmatrix}$$

de lo cual puede observarse como la $[B]$ sea independiente de la posi

ción del punto dentro del elemento y por consiguiente las deformaciones son constantes en todo el mismo.

A través de la ley constitutiva $\{ \sigma \} = | D | \{ \epsilon \}$ es a este punto fácil calcular la matriz de esfuerzos sustituyendo la ecuación encontrada para la $\{ \epsilon \}$ obteniéndose:

$$\{ \sigma \} = | D | | B | \{ \delta \} = | S | \{ \delta \}$$

siendo $| S |$ la matriz de esfuerzos.

c) La rigidez y las fuerzas nodales.

El siguiente paso es el de la búsqueda de la relación entre desplazamientos y fuerzas nodales, o sea de la rigidez del elemento.

Lo antes ilustrado demuestra que la condición que los desplazamientos en todos los puntos del elemento sean función lineal de las coordenadas, ha llevado a deformaciones compatibles y esfuerzos en equilibrio.

Para calcular la rigidez y así definir las fuerzas ficticias nodales $\{ F \}$ que satisfagan a las condiciones de equilibrio, se determina el trabajo externo realizado por estas fuerzas equivalentes que en forma matricial se expresa.

$$L_E = \frac{1}{2} \{ \delta \}^T \{ F \}$$

La energía total de deformación del elemento vale:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \{ \epsilon \}^T \{ \sigma \} dV$$

siendo V el volumen del elemento.

Ahora bien se puede escribir:

$$\{ \epsilon \}^T = \{ \delta \}^T | B |^T$$

y entonces:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \{ \delta \}^T | B |^T | D | | B | \{ \delta \} dV$$

Igualando el trabajo externo con la energía total de deformación, se obtiene la ecuación de equilibrio:

$$\begin{aligned} \{ \delta \}^T \{ F \} &= \{ \delta \}^T \int_V | B |^T | D | | B | \{ \delta \} dV \\ \{ F \}^e &= | K |^e \{ \delta \}^e \end{aligned}$$

con:

$$| K |^e = \int_V | B |^T | D | | B | dV$$

que es la matriz de rigidez del elemento que pone en relación los desplazamientos nodales con las fuerzas internas en los nodos.

Puede además observarse que $| B |$ y $| D |$ son independientes de las coordenadas y luego pueden salir del integral hasta obtener:

$$| K |^e = | B |^T | D | | B | t A$$

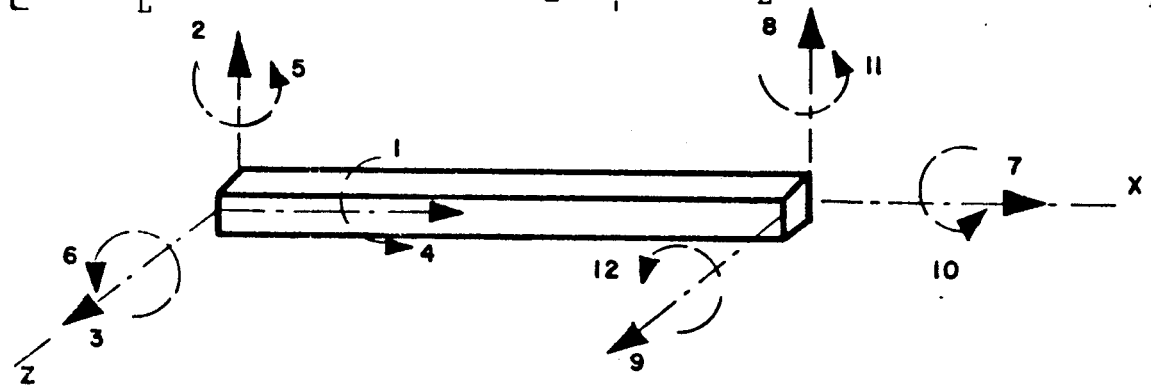
siendo " t " el espesor del elemento y " A " su área.

PRINCIPALES ALCANCES Y LIMITACIONES DEL M. E. F.

Este aspecto muy importante y complejo se presenta en forma extremadamente esquematizada mediante una serie de láminas anexas, enviando a la discusión la ampliación y complementación misma del tema. (Figs. 5-6-7).

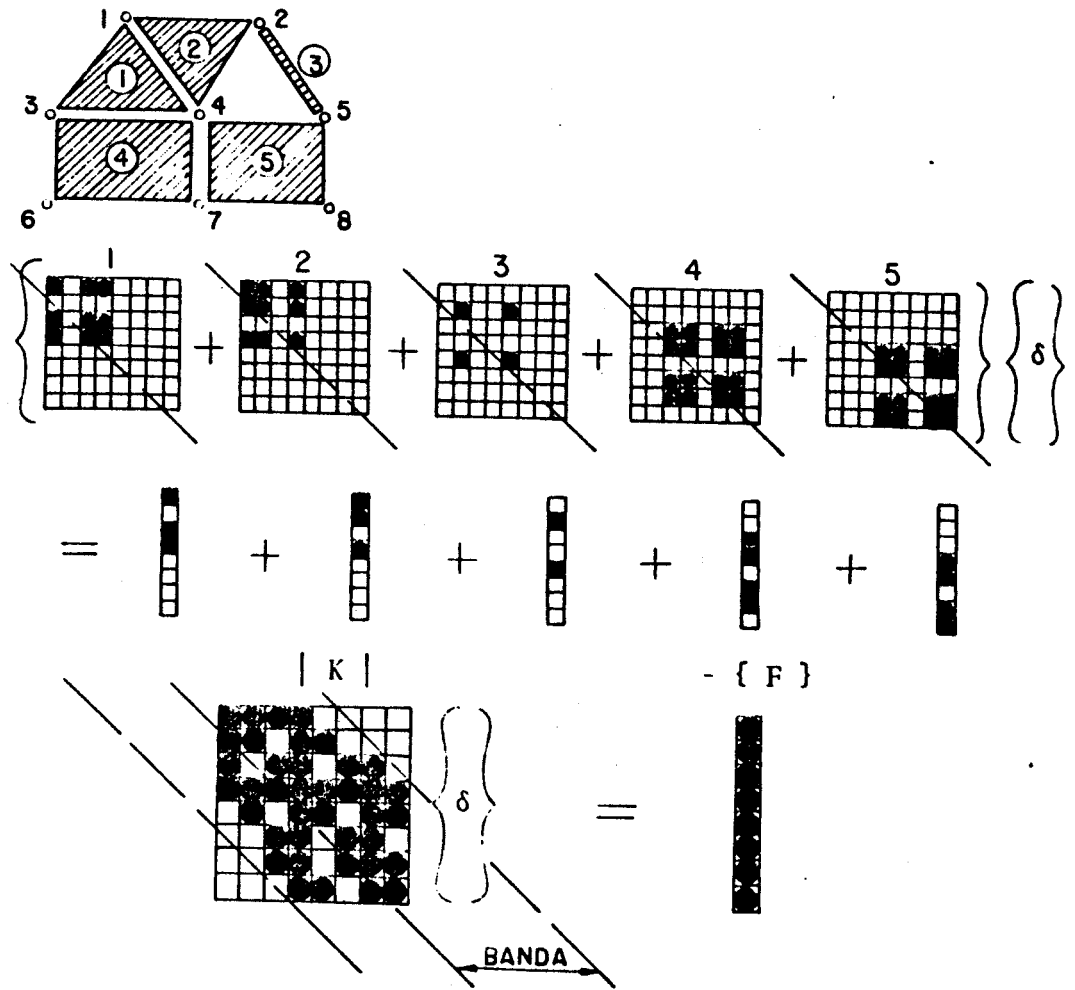
| | | | | | | | | | | | | |
|----|-----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------|---------------------|----------------------|----------------|----------------------|----------------------|----------------|-------------------|-------------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | $\frac{EA}{L}$ | | | | | | | | | | | |
| 2 | | $\frac{12EI_z}{L^3}$ | | | | | | | | | | |
| 3 | | | $\frac{12EI_y}{L^3}$ | | | | | | | | | |
| 4 | | | | $\frac{GC}{L}$ | | | | | | | | |
| 5 | | | $\frac{-6EI_y}{L^2}$ | | $\frac{4EI_y}{L}$ | | | | | | | |
| 6 | | $\frac{6EI_z}{L^2}$ | | | | $\frac{4EI_z}{L}$ | | | | | | |
| 7 | $-\frac{EA}{L}$ | | | | | | $\frac{EA}{L}$ | | | | | |
| 8 | | $\frac{-12EI_z}{L^3}$ | | | | $\frac{-6EI_z}{L^2}$ | | $\frac{12EI_z}{L^3}$ | | | | |
| 9 | | | $\frac{-12EI_y}{L^3}$ | | $\frac{6EI_y}{L^2}$ | | | | $\frac{12EI_y}{L^3}$ | | | |
| 10 | | | | $\frac{-GC}{L}$ | | | | | | $\frac{GC}{L}$ | | |
| 11 | | | $\frac{-6EI_y}{L^2}$ | | $\frac{2EI_y}{L}$ | | | | $\frac{6EI_y}{L^2}$ | | $\frac{4EI_y}{L}$ | |
| 12 | | $\frac{6EI_z}{L^2}$ | | | | $\frac{2EI_z}{L}$ | | $\frac{-6EI_z}{L^2}$ | | | | $\frac{4EI_z}{L}$ |

Simétrica



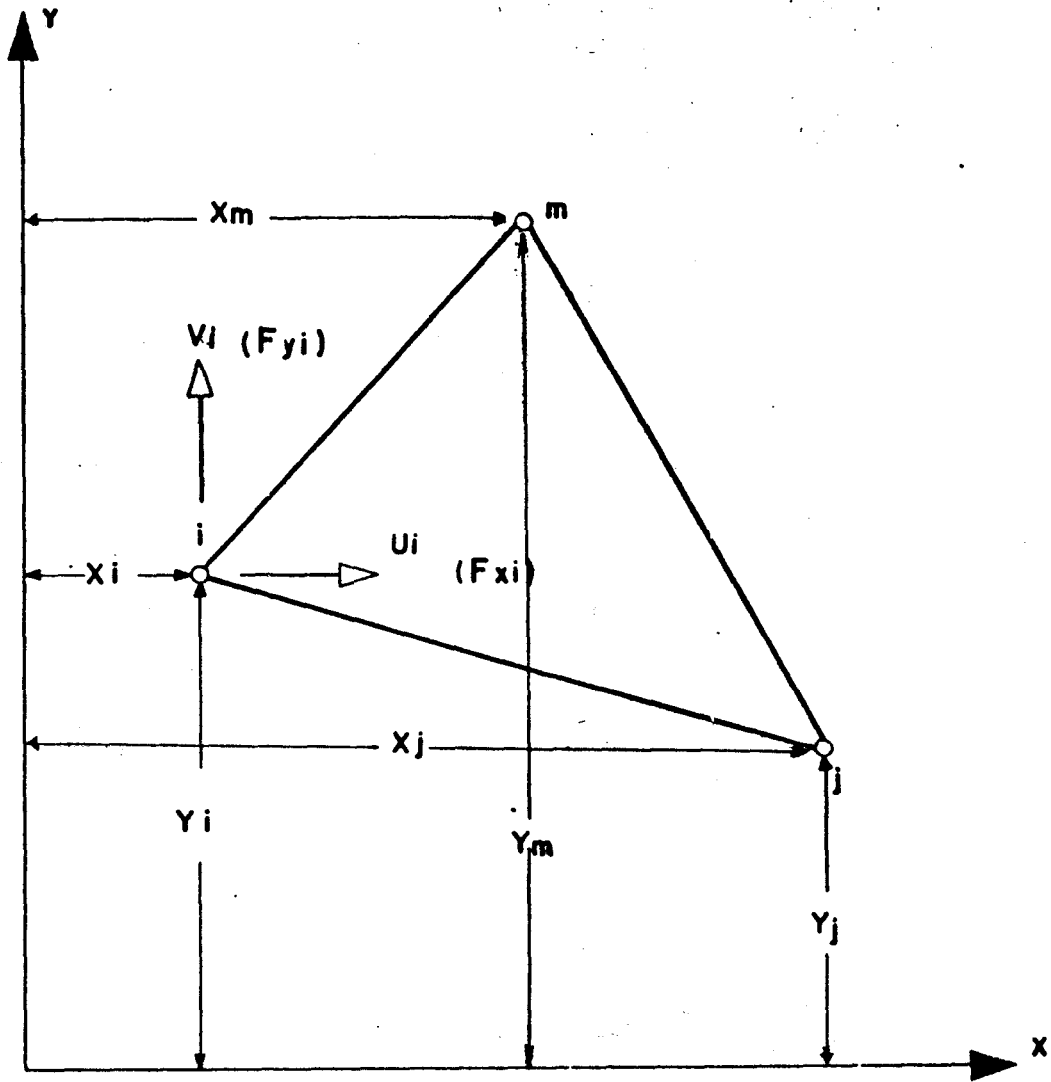
ELEMENTO ESTRUCTURAL PRISMÁTICO

FIG. 1



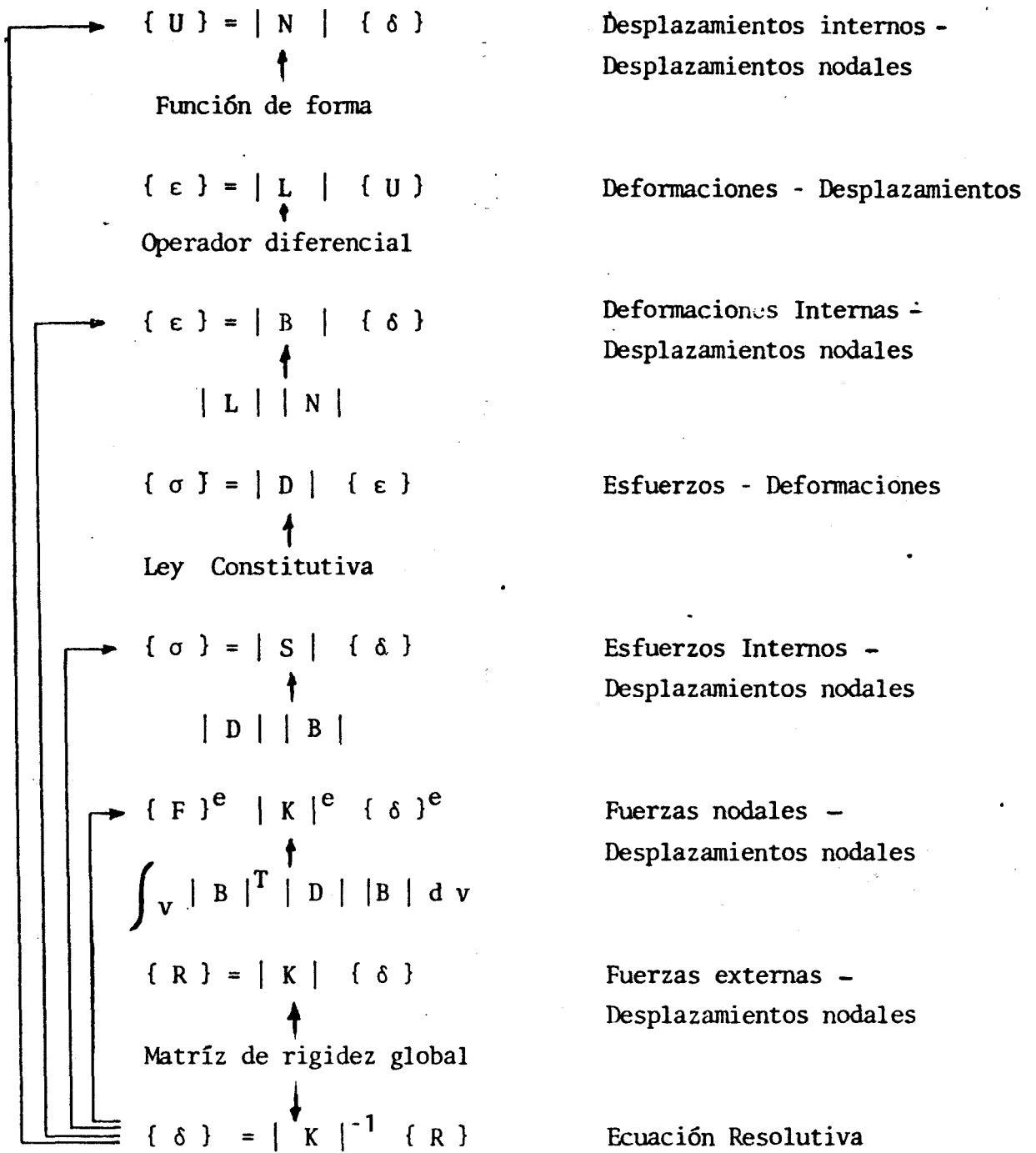
PROCESO DE ENSAMBLE DE LA RIGIDEZ GLOBAL.

FIG. 2



ELEMENTO FINITO TRIANGULAR

FIG. 3



FORMULAS PRINCIPALES DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS .

FIG. 4

ALCANCES PRINCIPALES DEL M.E.F.

- * GEOMETRIA CUALQUIERA
- * CONDICIONES DE BORDE CUALESQUIERA
- * HETEROGENEIDAD Y ANISOTROPIA
- * LEYES CONSTITUTIVAS CUALESQUIERA
- * EFECTOS TRIDIMENSIONALES
- * COMPORTAMIENTOS ESPECIALES:
 - MATERIAL NO RESISTENTE A TRACCION
 - DISCONTINUIDADES ESTRUCTURALES
 - INTERACCION ENTRE ESTRUCTURAS
 - PROBLEMAS DE CAMPOS (Flujo en medios porosos)
 - SIMULACION DE FASES CONSTRUCTIVAS
 - ANALISIS PARAMETRICOS
 - INTERPRETACION DE MEDICIONES
 - EFECTOS DINAMICOS

LIMITACIONES PRINCIPALES DEL M.E.F.

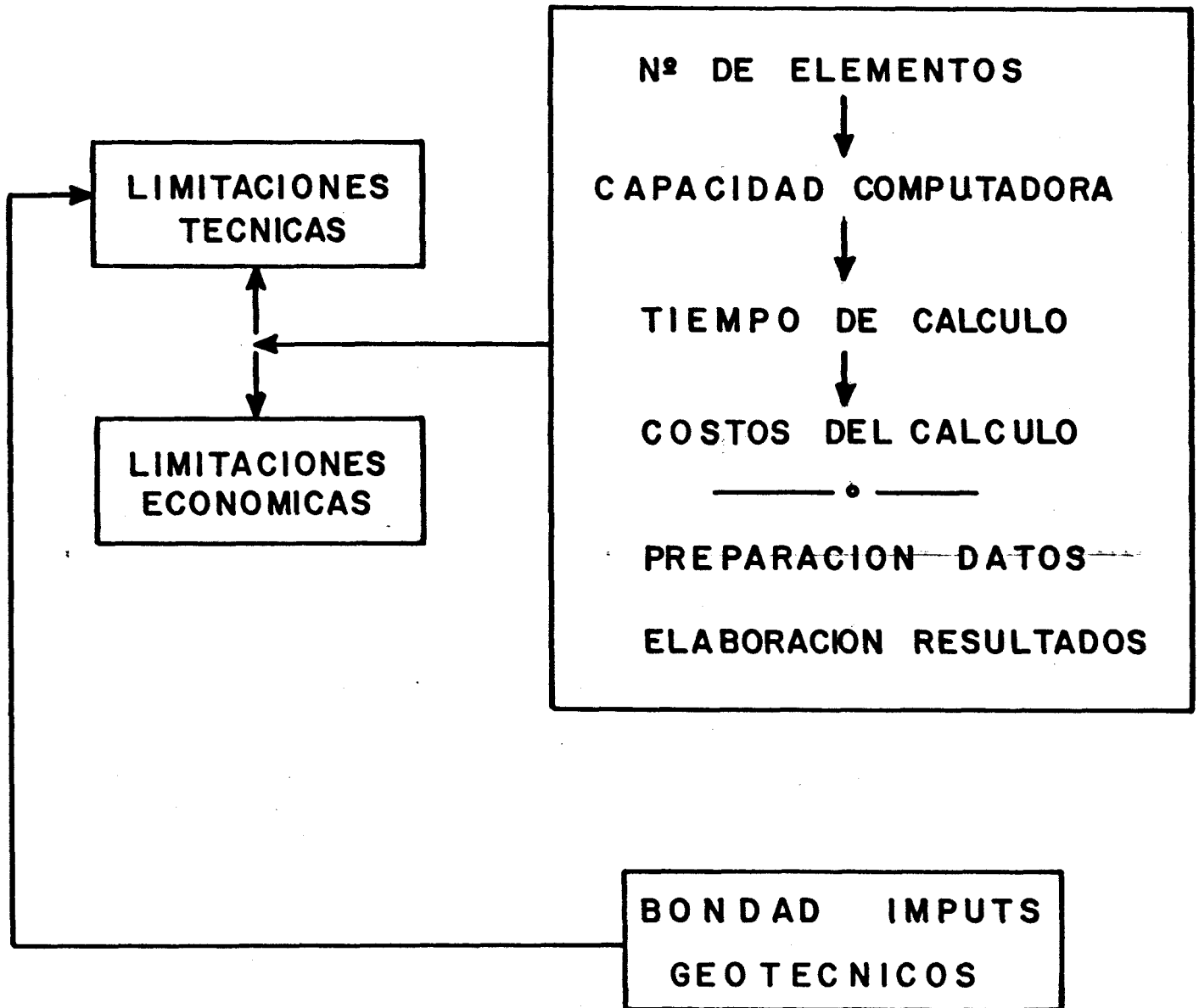


FIG. 6

PRINCIPALES ETAPAS EN EL CALCULO CON M.E.F.

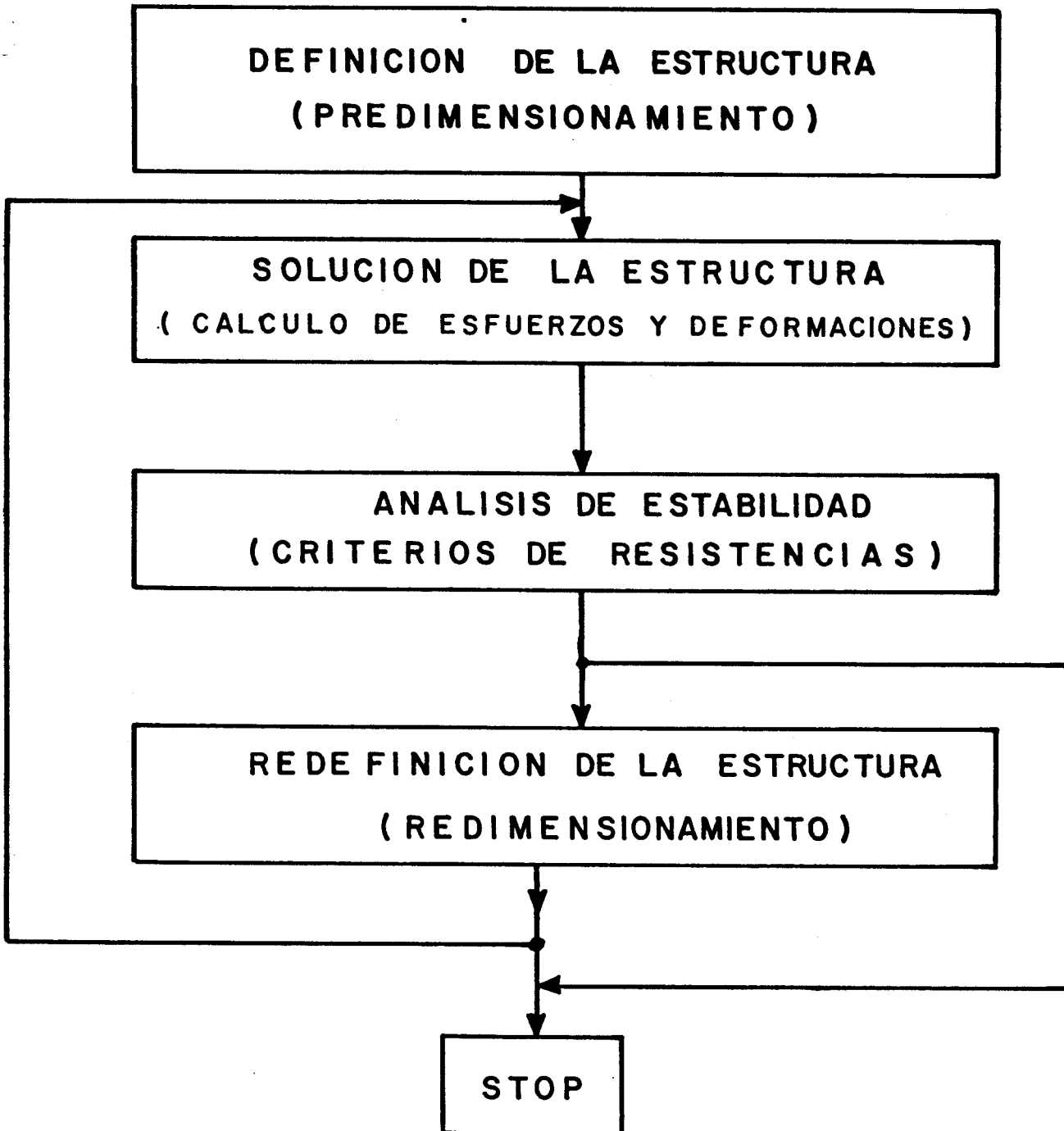


FIG. 7

EJEMPLOS REPRESENTATIVOS

Ejemplo # 1 (Rashid, Y.R. "Solution of elasto - static boundary value problems by the finite element method", Doctoral Dissertation, University of California, Berkeley, 1964).

Se considera, solamente para dar una idea de la precisión del Método, el Problema de Boussines, (Carga Vertical concentrada sobre la superficie de un semiespacio elástico) para el cual la tensión vertical σ_z responde a una solución en forma cerrada. La figura 8 da el modelo axialsimétrico para elementos finitos triangulares usado en este caso. Las condiciones de contorno consisten en imponer que los puntos nodales a lo largo del eje Z y sobre el perímetro externo sean móviles solamente a lo largo de la vertical; los puntos a lo largo de la base horizontal, con excepción de los dos nodos en los vértices que se consideran fijos, pueden desplazarse a lo largo de la horizontal. En la misma figura se reportan las líneas de igual σ_z que se confrontan con las calculadas con la fórmula cerrada ya mencionada. Como puede constatarse, el resultado es bastante satisfactorio.

Ejemplo # 2 (Barla, G. "II° Corso sulla Meccanica delle Rocce; la applicazione dei metodi delle tensioni e degli elementi finiti", C.N.R., Padova, 1972).

Con el mismo fin del ejemplo anterior se da un caso para el cual existe la solución analítica y se confronta esta con los resultados de la aplicación del M.E.F. Se trata de una estructura con comportamiento elástico - lineal plano: una plancha conteniendo un agujero circular (figura 9), sujeta a un estado de sollicitación monoaxial σ_y en la dirección del eje Y. Es suficiente aplicar a los nodos (66, 67, 68, 71 y 72) fuerzas verticales estáticamente equivalentes al mencionado estado de esfuerzos.

La solución mediante el M.E.F. suministra, en correspondencia de los

baricentros de los elementos triangulares, las sollicitaciones σ_x , σ_y e τ_{xy} (y luego también las tensiones principales σ_1 y σ_2 con su orientación respectiva) y, para todos los nodos los desplazamientos.

En la figura 9 se reportan como ejemplo, las tensiones σ_1 y σ_2 , en la dirección de los ejes coordenados, referidas a la tensión monoaxial aplicada σ_v . Estas tensiones confrontadas con las obtenidas mediante la teoría clásica de la elasticidad, permiten observar que, a pesar de los pocos elementos empleados en el modelo, el resultado es muy satisfactorio.

Ejemplo # 3 (Hoyaux, B. y Ladanyi, B. "Stress distribution due to gravity in a vertical rock bank," 10th Symposium on Rock Mechanics, Austria, Texas, 1968).

Este ejemplo tiene utilidad de poder referir a sus resultados algunas observaciones que se harán en los ejemplos sucesivos. Consiste en la determinación de la distribución de las tensiones en un talud vertical, en medio homogéneo, isotropo y elástico lineal. En la figura 10 se indica el modelo constituido por elementos finitos rectangulares (297 nodos y 260 elementos). Las condiciones de borde introducidas en la solución de este problema consisten, como lo indican los vínculos en la misma figura, en suponer que: los puntos nodales a lo largo de E D y B C sean libres de moverse a lo largo de la vertical; el lado C D a lo largo de la horizontal; y los puntos C y D sean fijos. En la figura se indican las tensiones principales en valor y dirección y las tensiones de corte máximo. El cálculo ha sido realizado con la hipótesis que la relación de Poisson del material sea 0.33 y en condición de deformaciones planas. Es interesante observar que existen zonas en que la tensión principal mínima es de tracción (en la cresta del talud) lo que por ejemplo puede determinar la formación en suelos y rocas de grietas pseudo-verticales denominadas de tensión. También es evidente en la figura el notable efecto de concentración de esfuerzos al pie de la pared, en don

de se logra un valor máximo de τ_{max} igual a $0.75 \gamma H$.

Es interesante notar que las tensiones a lo largo de B C son casi idénticas a las iniciales naturales lo que significa que las dimensiones del modelo son suficientes para una representación correcta del problema real.

Ejemplo # 4 (Morgenstern, N.R. y Eisenstein, Z. "Methods of estimating lateral loads and deformations", Specialty Conference on lateral stresses in the ground and design of earth retaining structures, ITHACA, 1970).

En la figura 11 se presenta el modelo de elementos finitos triangulares usado para el estudio de algunos problemas que se refieren al cálculo del empuje del terreno sobre un muro de sostenimiento. Los Autores toman en consideración una pared constituida por material homogéneo, isotropo y elástico lineal y asumen que el estado de tensión inicial en el terreno sea de tipo gravitacional. La pared, representada en el modelo por el lado a b, se supone rígida y se asume que el contacto entre terreno y muro sea sin fricción.

Estas condiciones son fáciles a ser reproducidas con el M.E.F. suponiendo que todos los nodos de ab sean libres de moverse verticalmente, pero se deben desplazar en horizontal de una cantidad establecida.

En particular se ha estudiado la influencia de las condiciones sobre el contorno en la base del terreno. Los casos examinados están ilustrados en las figuras 12 y 13 correspondiendo a las tres siguientes situaciones: a) muro que se mueve en sentido pasivo ($\Delta = 0.0025 H$); b) muro que se mueve en sentido activo ($\Delta = 0.00025 H$); c) muro fijo. En cada caso se ha calculado la presión sobre el muro y los resultados están representados en los diagramas de las figuras mencionadas. En la figura 12 es interesante observar que para el caso de empuje pasivo, la re-

sistencia pasiva aumenta debido a la presencia de la base escabra, se nota sin embargo que la influencia de las condiciones establecidas a lo largo de la base, disminuye con el aumentar de la distancia de esta desde el pie de la excavación.

Para lo que se refiere al caso de empuje activo (figura 13), cuando la superficie del substrato rígido coincide con la base de la excavación y existe perfecta adherencia, la presión horizontal se reduce de cerca del 50% respecto el valor correspondiente al estado de tensión inicial de reposo, en el terreno. Al mismo tiempo es interesante observar la presencia de tensiones de tracción lo que implica una fuerte no linealidad en la curva de empuje.

En el tercer caso, del muro fijo, es posible observar que los diagramas de presión están afectados en forma determinante por la presencia de la base rígida. En particular, la presión horizontal calculada en estas condiciones difiere sensiblemente de la inicial, sobre todo en el caso en que la base sea lisa.

En la figura 14 están resumidos y puesto a confrontación los resultados obtenidos en los tres casos y para base rugosa y lisa.

En conclusión puede enfatizarse en que la influencia de las condiciones de contorno, introducidas en el estudio de un particular problema de interés aplicativo, es esencial para el fin de poder simular en forma realística el comportamiento de una estructura.

Ejemplo # 5 (Clough, G.W. y Duncan, J.M. "Finite Elements analysis of retaining wall behavior;" J. Soil Mech. Found Div., Vol. 97, SM12, 1971).

En el ejemplo anterior se hizo la hipótesis de falta de fricción entre muro y terreno; el M.E.F. así como aplicado a este ejemplo permite tomar en cuenta esta fricción. Los autores representan la intercara entre suelo y muro mediante elementos finitos monodimensionales del tipo de

aquellos descritos por otros autores y empleados para representar el comportamiento de juntas de discontinuidad presentes en un macizo rocoso.

Estos elementos monodimensionales se caracterizan por una matriz de rigidez que es posible escribir una vez conocidas las deformabilidades en sentido normal y tangencial de la zona de contacto entre muro y terreno,

El método toma en cuenta además un comportamiento no lineal de estas juntas lo cual se reproduce mediante ecuaciones de tipo hiperbólico ya descritas para otros casos.

Sobre la base de este modelo, utilizando la red de elementos finitos representada en la figura 15, se ha calculado el empuje horizontal sobre un muro de sostenimiento, debido a un relleno de arena, en la hipótesis que el muro tenga una rotación en sentido activo de una cantidad establecida.

En la tabla de la misma figura están dados los datos complejos del problema examinado y los resultados obtenidos para tres casos analizados a saber: a) falta de fricción entre terreno y muro; b) perfecta adhesión; c) ángulo de fricción igual a $2/3$ del ángulo de fricción interno del terreno.

Las curvas representadas en la figura dan el empuje horizontal a una dada profundidad respecto a la superficie del terreno y para diferentes valores del desplazamiento Δ medido en superficie. Se observa que las distribuciones de presión obtenidas en los distintos casos son bastante similares entre ellas y que la variación de presión con la profundidad es de tipo no lineal.

De especial interés es el hecho que, cuando Δ/H es igual a 0.0023, las condiciones de presión activas son logradas casi sobre toda la altura

del relleno. Estos resultados están de acuerdo perfectamente a los obtenidos experimentalmente por Terzaghi (1934). En la última parte de la figura 15 están representados resultados relativos a la relación entre la fuerza horizontal contra el muro y su movimiento. Se consideran las condiciones que se verifican para muros de desplazamiento horizontal o rotación conocidos, sea en sentido activo que pasivo. El diagrama que se está comentando se refiere a las condiciones de fricción nula entre pared y terreno.

Ejemplo # 6 (Clough, G.W. y Duncan, J.M. "Finite Elements analysis of retaining wal behavior", J.Soil Mech.Found Div., Vol. 97, SM12, 1971).

Se examina en este ejemplo otro interesante aspecto de la versatilidad de empleo del M.E.F., la simulación de las fases de constructor de una obra. Se trata en particular de estudiar el estado de deformación que se verifica en el transcurso de la construcción de un muro de gravedad.

En la práctica se procede a rellenar en capas sucesivas la parte posterior al muro previamente construido; así mismo, con el método de elementos finitos se rellena la zona detrás del muro con elementos de diferentes formas con peso definido, según las modalidades constructivas que se desea representar.

En la figura 16 se reporta una tabla conteniendo las principales características físico - mecánicas empleadas en el análisis de simulación de las diferentes etapas de construcción, las mismas que también están esquematizadas en la figura.

Entre los resultados obtenidos, particular interés toman los referentes a las deformaciones de la estructura que están reportados en la figura en una escala extremadamente amplificadas; se trata de las deformaciones del muro y de su fundación que se verifican mientras se efectúa el relleno.

Se observa que, en el transcurso de la construcción, el muro rota hacia el relleno al puesto que hacía la excavación, como parecería más lógico, por lo menos según la teoría clásica.

Sin embargo puede notarse que la base del muro se mueve hacia la excavación. Entonces a pesar de que el muro haya rotado hacia atrás, el mismo se ha movido y ha rotado, relativamente al relleno, en forma tal que la presión ejercida por este se hace menor a la correspondiente a las condiciones de reposo.

En la última parte de la figura 16 se confrontan los resultados, obtenidos mediante la teoría clásica, sea considerando que despreciando el efecto de la resistencia pasiva en la base del muro, con aquellos obtenidos por el M.E.F. Se puede observar que la distribución de presión calculada con este método implica que la resultante de las fuerzas sobre el muro esté aplicada por debajo del tercio medio de la altura del muro.

Se constata además que los resultados obtenidos con el M.E.F. difieren de aquellos calculados mediante la teoría clásica y están más cercanos a aquellos dados por esta última, cuando se desprecia el efecto debido a la resistencia pasiva.

Ejemplo # 7 (La Verne Palmer, J.H. y Cameron Kenney, T. "Analytical study of a braced excavation in weak clay", Canadian Geotechnical Journal, Vol. 9, N.2, 1972).

Quizás una de las aplicaciones más provechosas que se hace del M.E.F. en geotecnia, es la de los análisis paramétricos de aquellos problemas que, como casi todos los reales, involucran un número muy alto de parámetros. Es este el caso por ejemplo de las estructuras de contención ancladas o apuntaladas como las que se presentan en este ejemplo.

En la figura 17 se representa el modelo de elementos finitos usado para el estudio paramétrico de una excavación apuntalada, cuyos datos principales también se dan en la figura. En la tabla 1 incluida se indican todos los parámetros tomados en cuenta y para cada uno de ellos se indica el valor base usado y el rango de variaciones. Estos parámetros están agrupados en tres categorías: condiciones del terreno, condiciones del soporte y condiciones generales.

En la tabla 2 de la misma figura 17 se reportan los resultados interesantes del análisis paramétrico realizado. En particular se indica la influencia relativa que los mencionados parámetros tienen sobre el valor de las deformaciones y sobre los valores máximos de las cargas en los puntales.

De esta forma puede observarse como por ejemplo la rigidez efectiva del puntal tiene una influencia muy grande (3) sea sobre las deformaciones (que disminuyen con el aumentar de la rigidez: - 3), sea sobre las cargas establecidas en los puntales (que aumentan con el aumentar de la rigidez: + 3). Mínima importancia en cambio se demuestra tienen la cohesión estructura - terreno y la denominada "reserva de resistencia" entendiendo con este término la diferencia entre la resistencia al corte (C_u) y el esfuerzo de corte (K_o) inicial (aumentando estas disminuyen poco sea las deformaciones como las cargas en los puntales: 1). De la misma forma sucesivamente se puede observar la influencia relativa de todos los demás parámetros.

El ejemplo está complementado con un análisis referente a una obra realmente ejecutada que ha sido analizada con un modelo de elementos finitos similar al que se usó para el análisis paramétrico. De esta forma se puede evaluar la eficacia y bondad del procedimiento del cálculo numérico cuyos resultados fueron comparados con los obtenidos de una intensa campaña de mediciones llevada a cabo en la obra en mención.

En la figura 18 se presenta el esquema de la obra y de la instrumentación empleada así como el modelo de elementos finitos cuadrangulares utilizado. En la figura 19 se da una descripción detallada de las condiciones reales del suelo en la sección analizada con el M.E.F. e instrumentada.

Finalmente en la figura 20 se ponen a confrontación los resultados de las mediciones de campo y los de la simulación numérica, relativos a las deformaciones en superficie, en profundidad y a las cargas en los puntales.

Ejemplo # 8: (Watanabe, T. "Subway Tunnelling in soft ground", Proceedings of the 6th Asian Regional Conference on Soil Mechanics and Foundation engineering, Singapore, 1979).

Este último ejemplo demuestra entre otro, la facilidad de poder tomar en cuenta con el M.E.F. diferentes y complejas condiciones de contorno, además que geométricas. Se trata de una aplicación para la prevención de las deformaciones de estructuras de fundación.

La figura 21, muestra en forma esquemática una sección de la excavación de un túnel metropolitano en la cercanía de la fundación de una autopista elevada. En este caso, se planteó la construcción de un diafragma en terrado en concreto para la limitación de las deformaciones de la fundación mencionada.

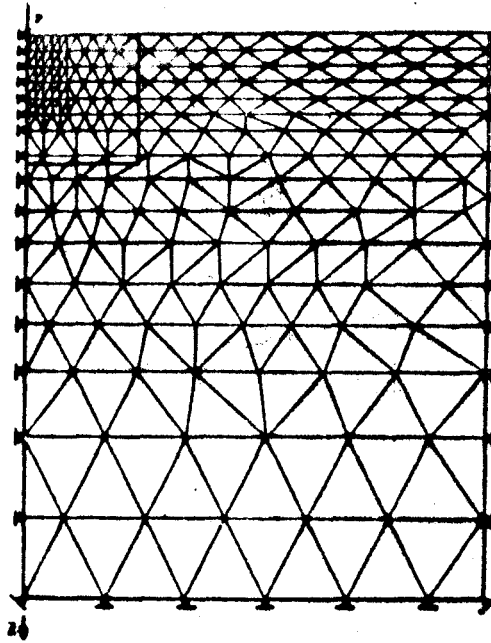
En la segunda parte de la misma figura están representadas las deformaciones de todas las estructuras involucradas, causadas por la excavación del túnel y calculadas mediante el M.E.F. Asumiendo para el terreno las características derivadas de la exploración profunda del mismo en la sección analizada.

Los desplazamientos del terreno alrededor de la excavación presentan

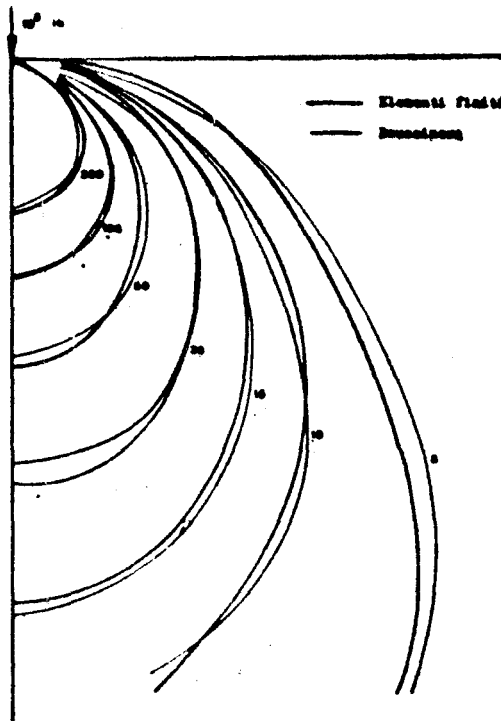
un efecto predominante, sobre la autopista elevada, de desplazamiento horizontal del extremo " F " del volado estructural que sostiene la vía misma (ver figura),

De los resultados del análisis, el tamaño del desplazamiento horizontal de " F " resulta de 3.65 cm. sin la presencia del diafragma, y de 1.83 cm. con la presencia del diafragma; o sea cerca de la mitad que en el primer caso. Se pueden de esta forma evaluar y cuantificar los efectos beneficiosos del diafragma previsto.

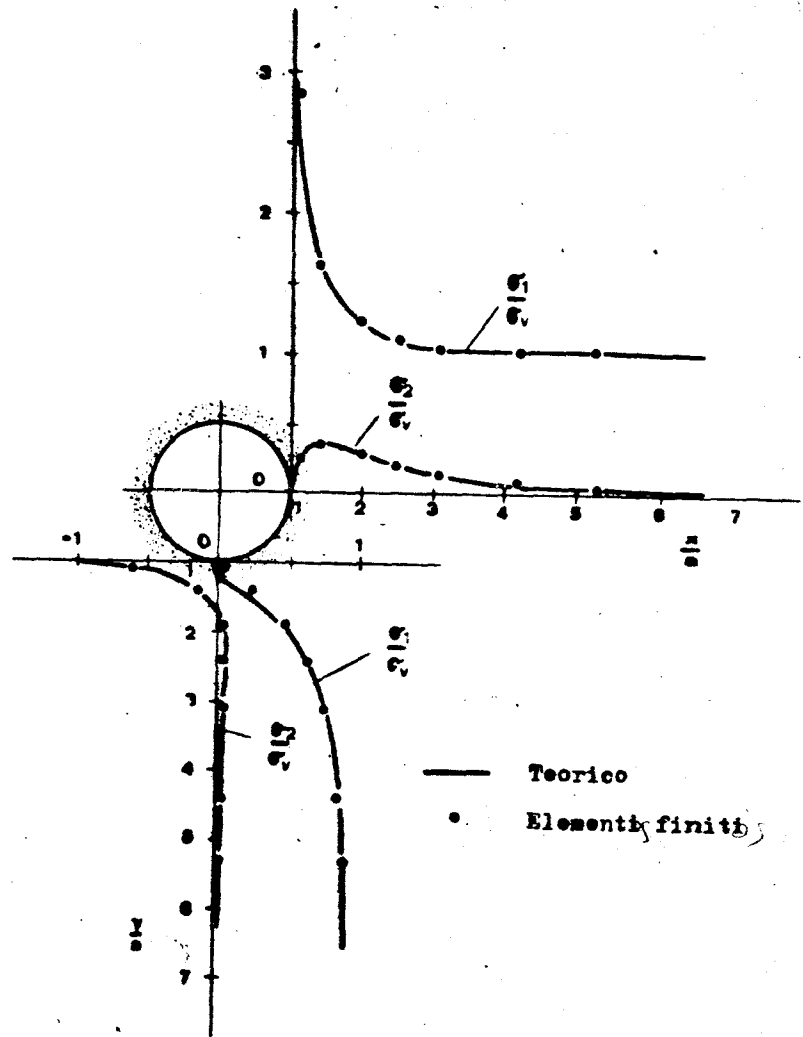
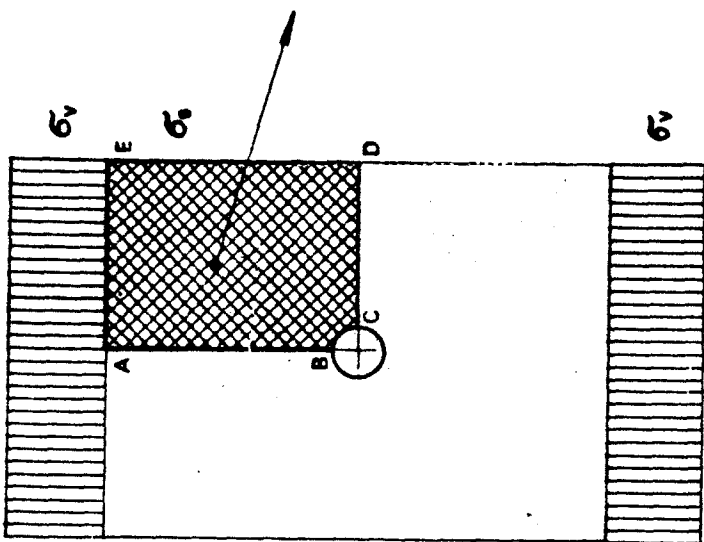
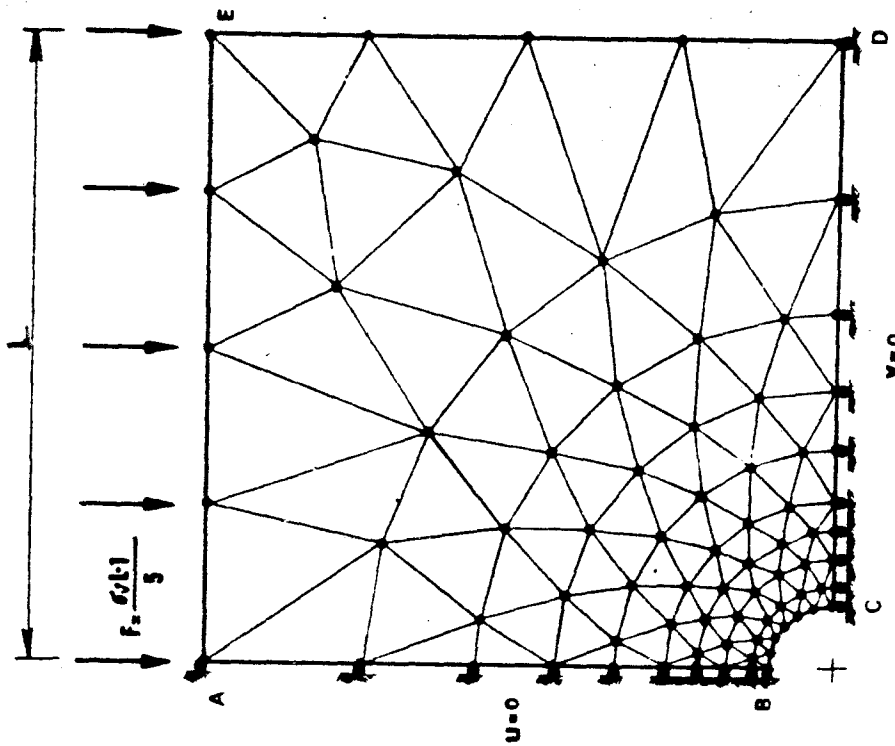
Caracas, octubre 19 de 1980.



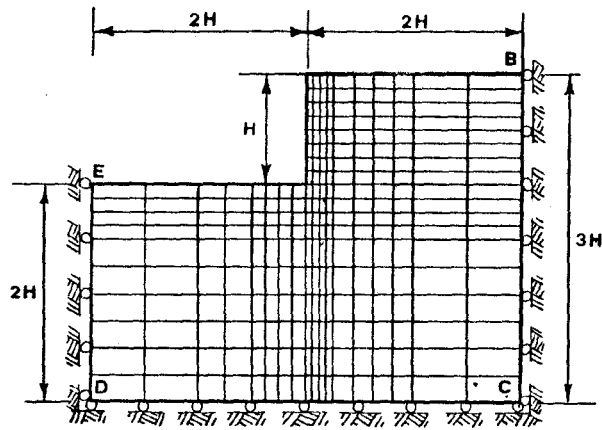
- Problema di Boussinesq: modello assialsimmetrico ad elementi finiti triangolari (Rashid, 1964).



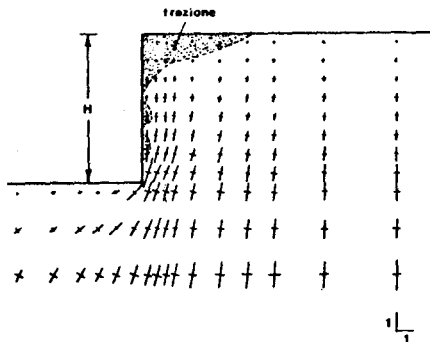
- Problema di Boussinesq: tensioni di uguale σ_x (Rashid, 1964).



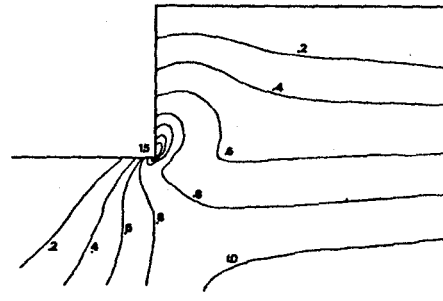
- Distribuzione delle tensioni nell'interno di un foro circolare in una piastra sottoposta ad uno stato di sollecitazione monoassiale σ_v nella direzione verticale.



- Modello ad elementi finiti rettangolari
(Hoyaux e Ladanyi, 1968).



(a) Tensioni principali



(b) Curve di egual $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\gamma H} = \frac{2\tau_{max}}{\gamma H}$

- Tensioni in una parete verticale, omogenea,
isotropa ed elastica lineare (Hoyaux e
Ladanyi, 1968).

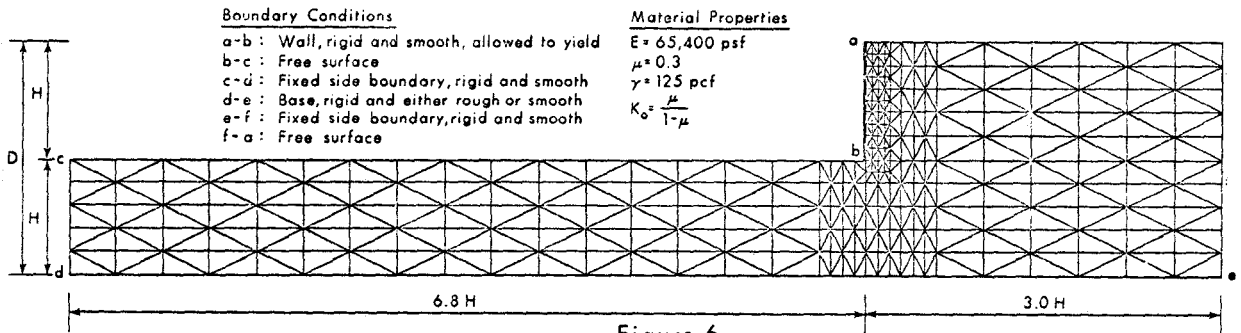


Figure 6
Finite Element Idealisation of a Problem of Earth Pressure behind a Yielding Wall


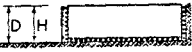
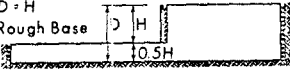
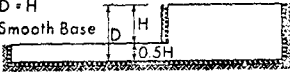
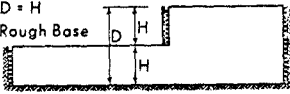
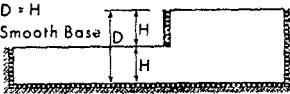
| Boundary Conditions Scheme | Wall Yielding 0.0025H in Active Sense | Wall Unyielding | Wall Yielding 0.0025H in Passive Sense |
|--|---|-----------------|--|
| D = H Rough Base  | 493% | 1000% | 151.0% |
| D = H Smooth Base  | 91.0% | 1000% | 110.5% |
| D = H Rough Base  | 75.4% | 96.8% | 119.8% |
| D = H Smooth Base  | 119.7% | 1300% | 147.7% |
| D = H Rough Base  | 78.3% | 94.7% | 114.6% |
| D = H Smooth Base  | 125.0% | 136.2% | 154.2% |

Table 1
Summary of Total Lateral Pressures as Percentage of an Ideal " $K_0 = \frac{\mu}{1-\mu}$ " Distribution

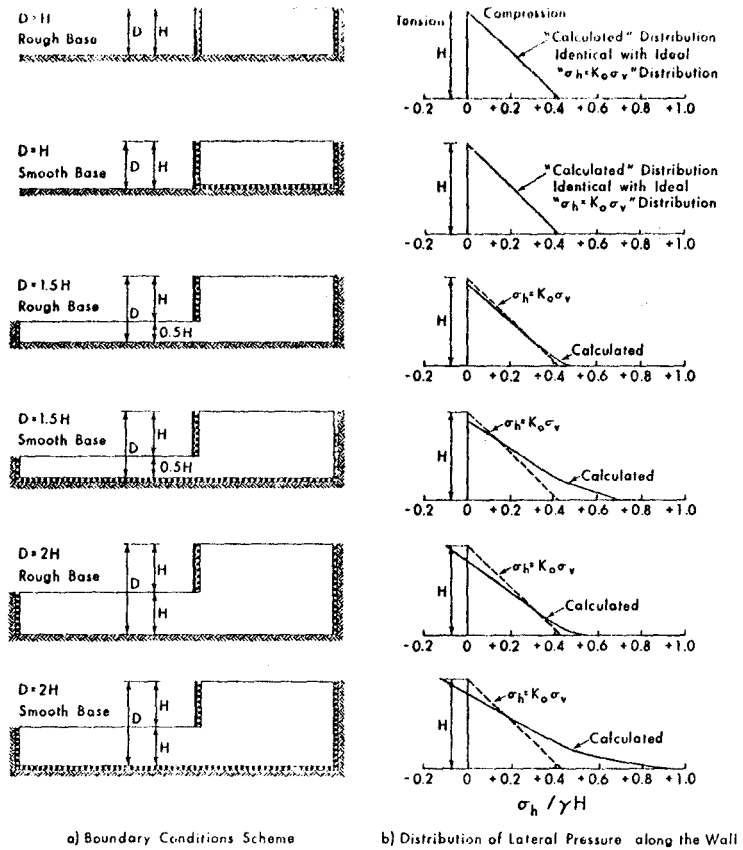


Figure 7

Lateral Pressure Distributions for Different Boundary Conditions when No Yielding of Wall is Allowed

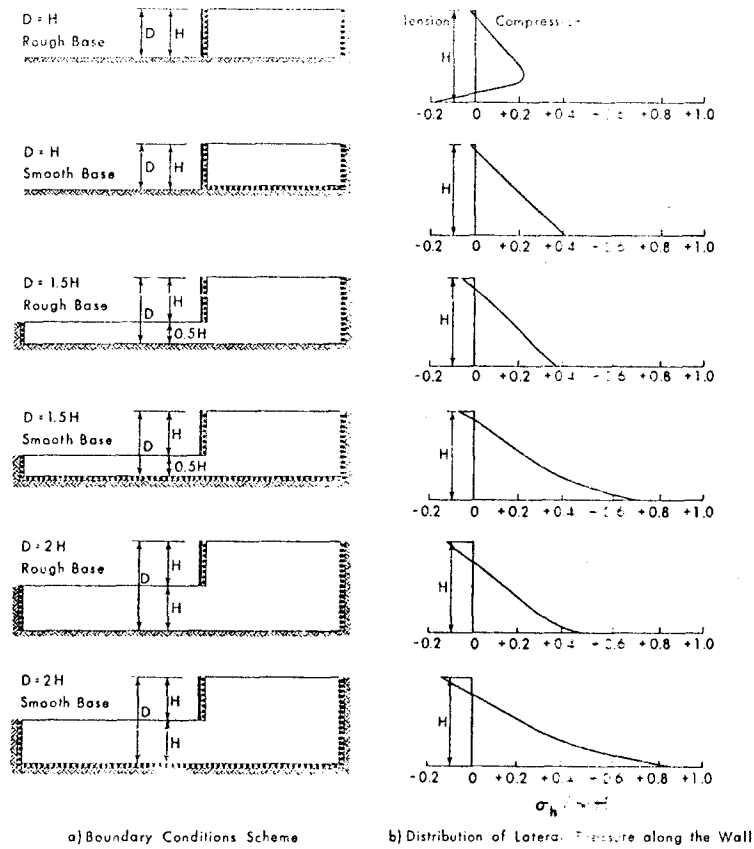


Figure 8

Lateral Pressure Distributions for Different Boundary Conditions when The Wall Yields $0.0025H$ in The Active Sense

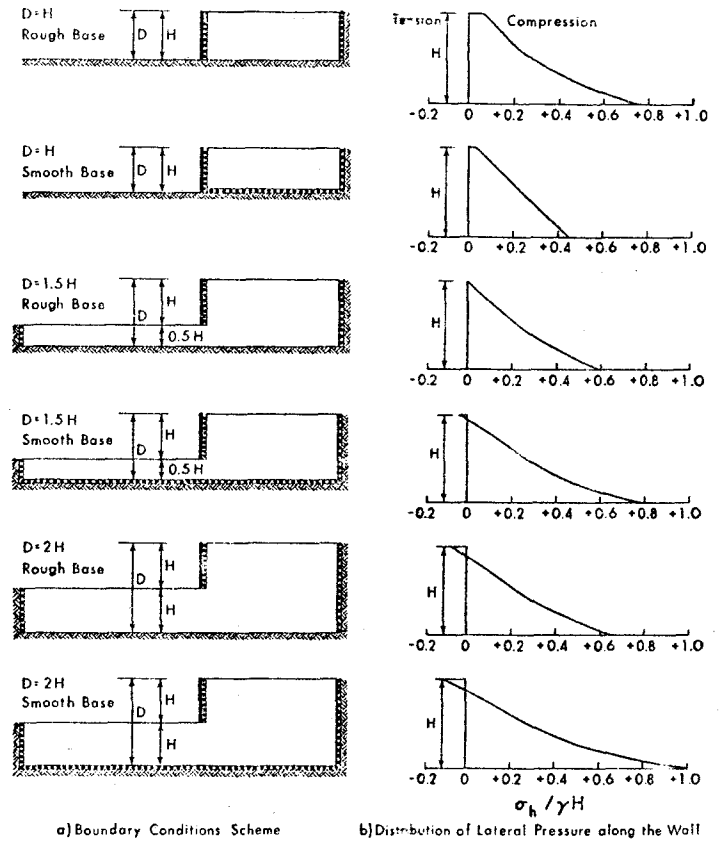


Figure 9

Lateral Pressure Distributions for Different Boundary Conditions when The Wall Yields $0.0025H$ in The Passive Sense

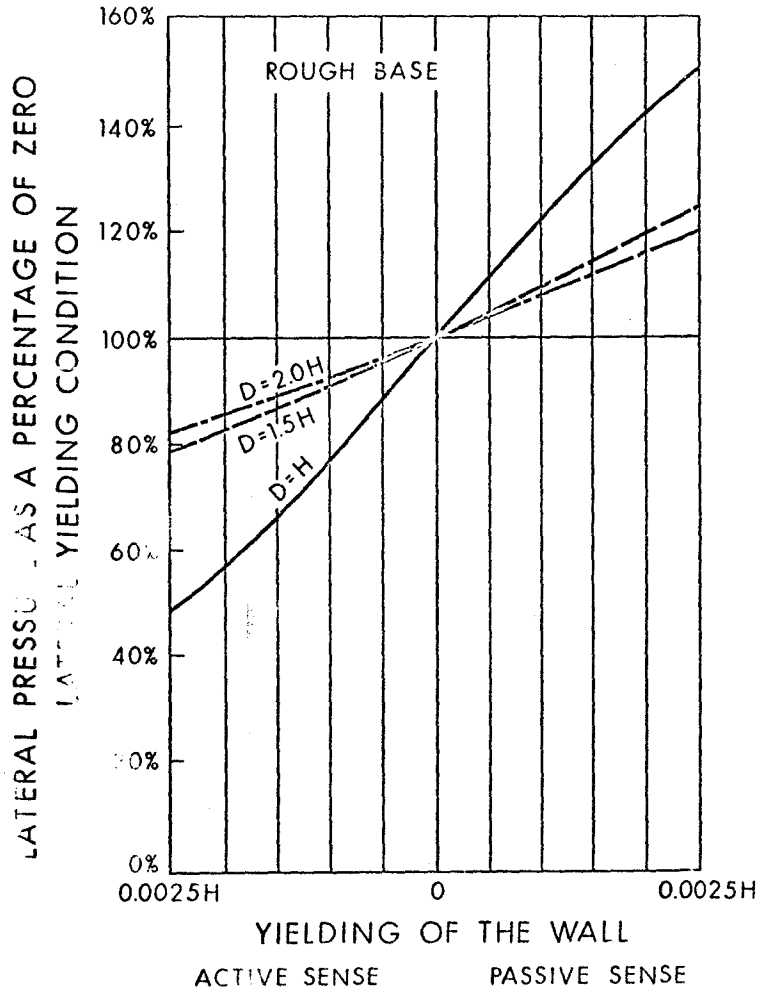


Figure 10

Variation of Lateral Pressure with Horizontal Yielding of the Wall for Rough Base

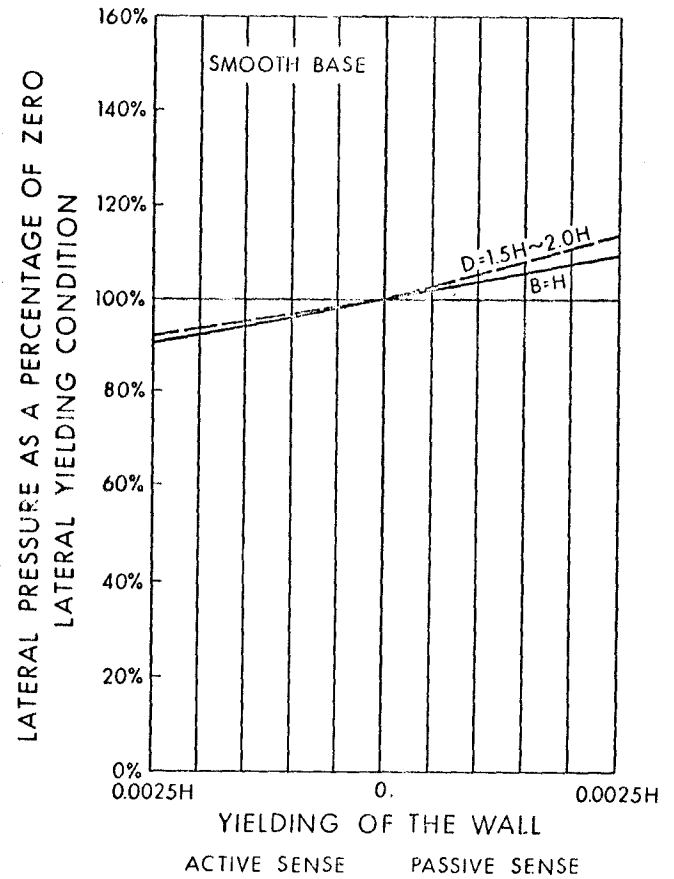


Figure 11

Variation of Lateral Pressure with Horizontal Yielding of the Wall for Smooth Base

TABLE 1.—PROPERTIES EMPLOYED IN ANALYSES OF CLASSICAL EARTH PRESSURE PROBLEMS

| Backfill (1) | Parameter (2) | Symbol (3) | Value (4) |
|----------------------------|---|------------|-----------|
| Medium-dense sand backfill | Unit weight, in pounds per cubic foot | γ | 100 |
| | Coefficient of earth pressure at rest | K_0 | 0.43 |
| | Cohesion intercept, in pounds per square foot | c | 0 |
| | Friction angle in degrees | ϕ | 35 |
| | Primary loading modulus number | K | 720 |
| | Unloading-reloading modulus number | K_{ur} | 900 |
| | Modulus exponent | n | 0.5 |
| Wall-backfill interface | Failure ratio | R_f | 0.8 |
| | Poisson's ratio | ν | 0.3 |
| | Friction angle in degrees | δ | Varies |
| Base-backfill interface | Stiffness number | K_I | Varies |
| | Stiffness exponent | n | Varies |
| | Failure ratio | R_f | Varies |
| | Friction angle in degrees | δ | 24 |
| Base-backfill interface | Stiffness number | K_I | 75,000 |
| | Stiffness exponent | n | 0.5 |
| | Failure ratio | R_f | 0.9 |

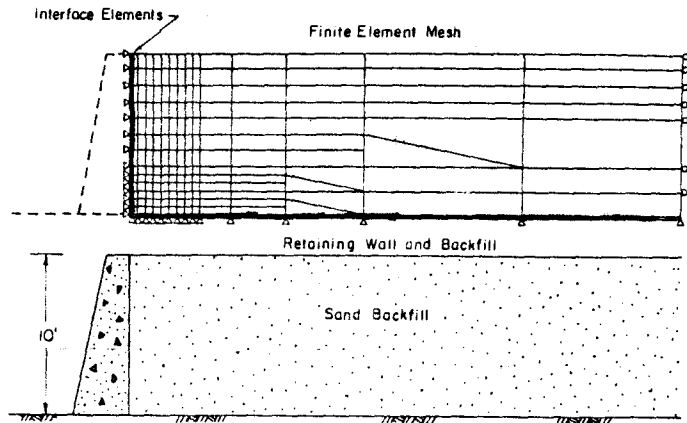


FIG. 4.—RETAINING WALL—BACKFILL SYSTEM AND FINITE ELEMENT REPRESENTATION

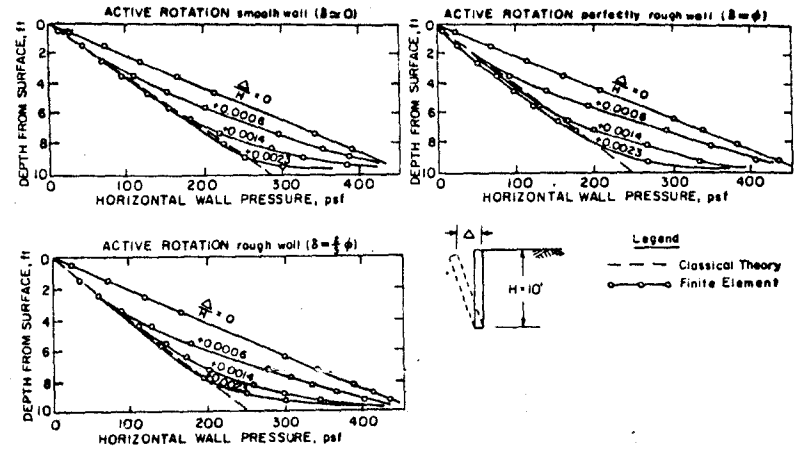


FIG. 5.—VARIATION OF HORIZONTAL WALL PRESSURE DISTRIBUTIONS WITH RELATIVE DEFLECTIONS

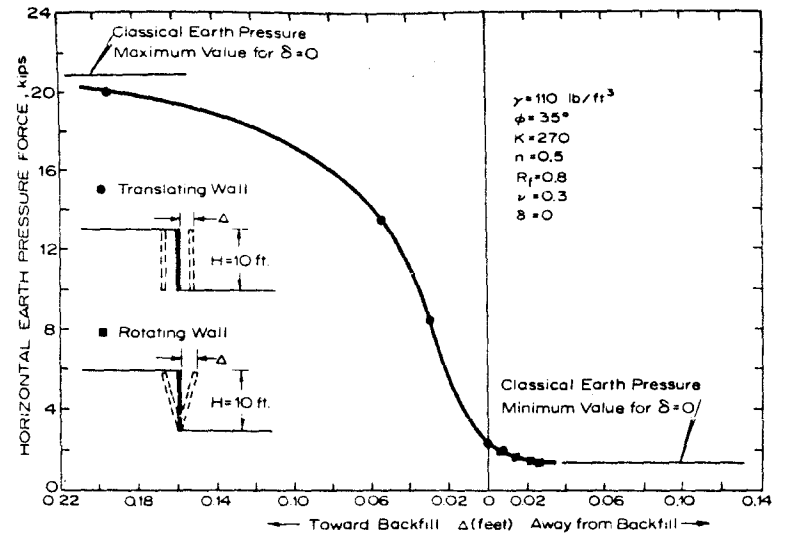


FIG. 6.—VARIATIONS OF EARTH PRESSURE FORCE WITH WALL MOVEMENT CALCULATED BY FINITE ELEMENT ANALYSES

TABLE 2.—PROPERTIES EMPLOYED IN ANALYSIS SIMULATING RETAINING WALL CONSTRUCTION

| Parameter (1) | Symbol (2) | Value For | |
|--|---------------|---------------------|---------------------|
| | | Foundation (3) | Backfill (4) |
| Unit weight in pounds per cubic foot | γ | 110 | 100 |
| Coefficient of earth pressure at rest | K_0 | 0.43 | — |
| Cohesion intercept in pounds per square foot | c | 0.0 | 0.0 |
| Friction angle in degrees | ϕ | 35 | 30 |
| Primary loading modulus number | K | 720 | 400 |
| Unloading-reloading modulus number | K_{ur} | 900 | 600 |
| Modulus exponent | n | 0.5 | 0.5 |
| Failure ratio | R_f | 0.8 | 0.8 |
| Poisson's ratio | ν | 0.3 | 0.3 |
| Friction angle in degrees | δ | 30 ^a | 30 ^b |
| Stiffness number | K_I | 50,000 ^a | 50,000 ^b |
| Stiffness exponent | n | 1.0 ^a | 1.0 ^b |
| Failure ratio | R_f | 0.9 ^a | 0.9 ^b |

^a Foundation interface.
^b Backfill interface.

EJEMPLO 6

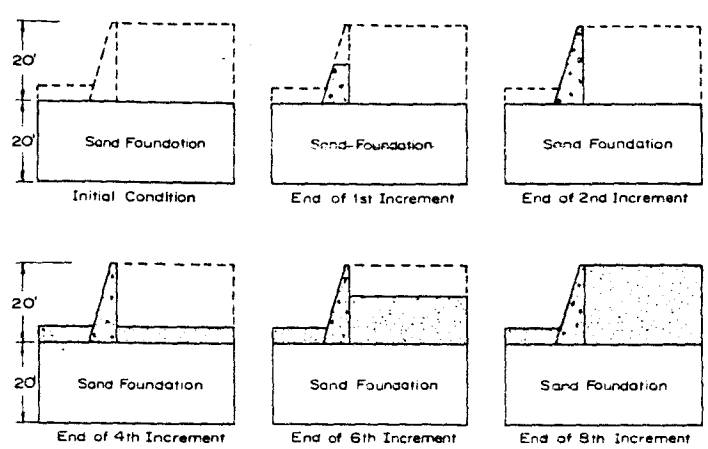


FIG. 7.—GRAVITY WALL CONSTRUCTION SEQUENCE

FIG. 16

10 ft. Structure Scale
0.1 ft. Deflection Scale

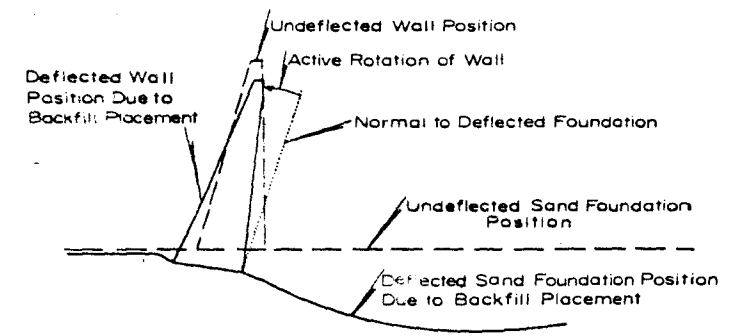


FIG. 8.—WALL AND SAND FOUNDATION DEFLECTIONS DURING BACKFILL PLACEMENT

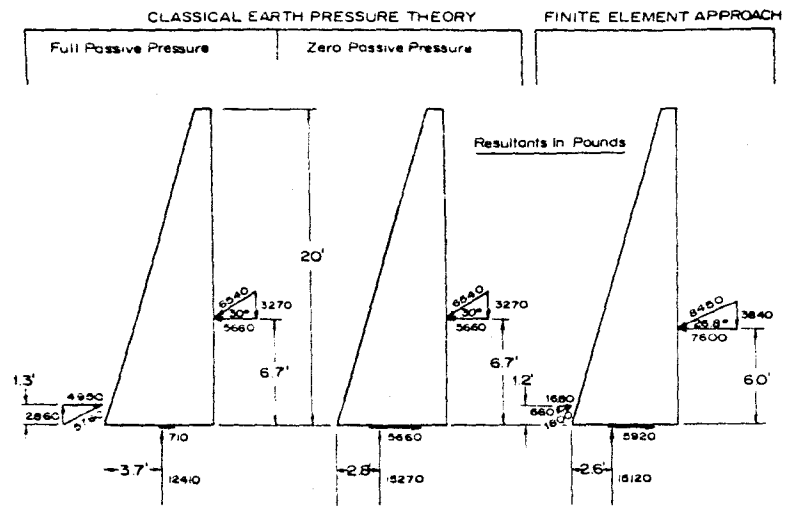


FIG. 9.—EARTH PRESSURE RESULTANTS ACTING ON WALL FROM CLASSICAL EARTH PRESSURE THEORY AND FINITE ELEMENT RESULTS

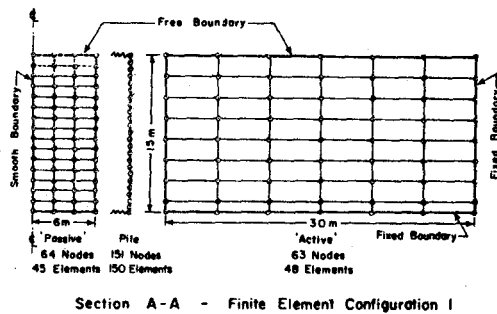
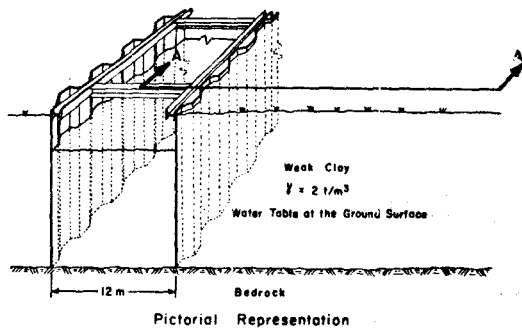


FIG. 1. Finite element model used in the parametric study

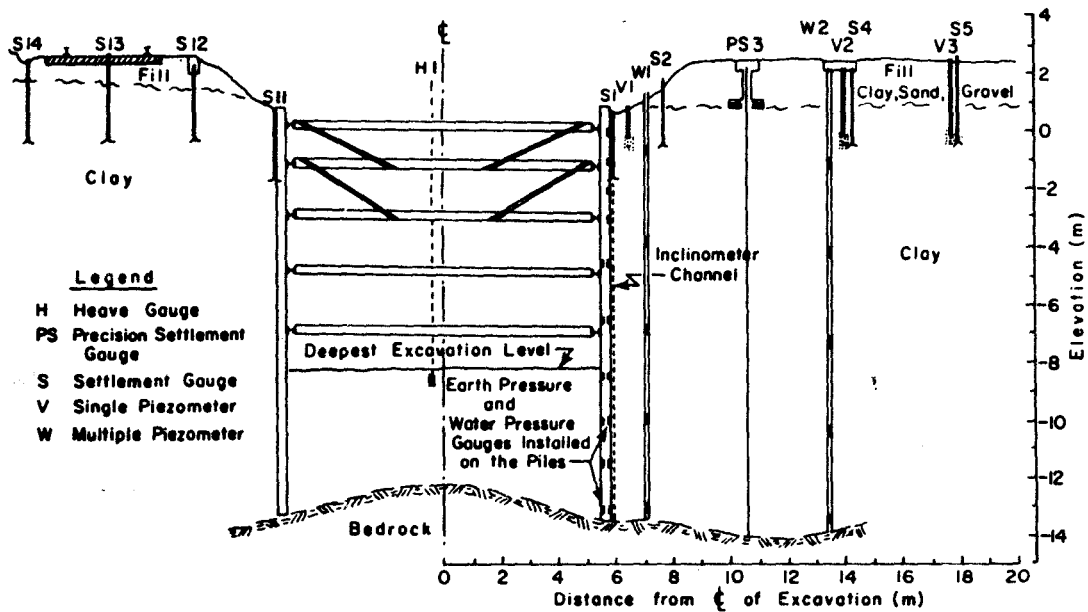
TABLE 2. Relative influence of various parameters

| Parameter | Relative influence* | |
|---------------------------|---------------------|---------------------|
| | Deformations | Maximum strut loads |
| <i>Soil Conditions</i> | | |
| Initial stress ratio | Strength reserve -1 | -1 |
| Shear strength | | |
| Shear strength reduction | +1 | +1 |
| E_{soil} | -3 | -2 |
| Soil-to-pile adhesion | -1 | -1 |
| <i>Support Conditions</i> | | |
| EI pile | -3 | +2 |
| Effective strut stiffness | -3 | +3 |
| Prestress | -2 | +3 |
| Vertical strut spacing | +2 | +3 |

*NOTE: (i) Graded from minor influence = 1 to major influence = 3. (ii) The sign indicates the change in deformations or maximum strut loads for an increase in the value of the parameter (+ for increases, - for decreases).

TABLE 1. Basic conditions and variations for the parametric study

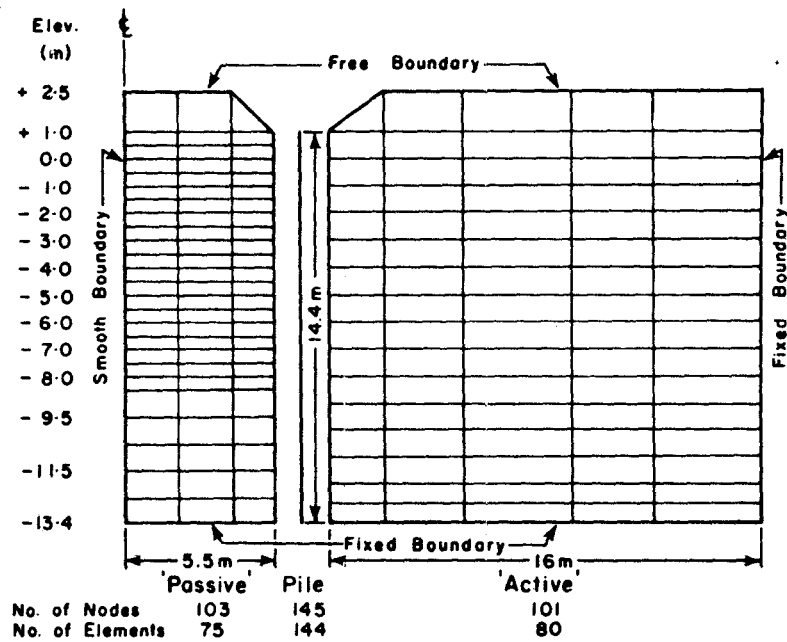
| Parameter | Basic value | Variations |
|---|-----------------------|--|
| <i>Soil Conditions</i> | | |
| Initial stress ratio (K_0) | 0.5 | 0.6 0.7 |
| Undrained shear strength (c_u) (t/m^2) | $1.0 + 0.2p'$ | $0.75 + 0.2p'$ $1.25 + 0.2p'$ |
| Modulus of deformation of soil (E) (t/m^2) | 500 | 250 1000 |
| Poisson's ratio of soil | 0.49 | None |
| Reversed shear strength reduction (%) | 0 | 20 40 |
| Soil-to-pile adhesion (t/m^2) | 0 | $1.0 + 0.2p'$ |
| <i>Support Conditions</i> | | |
| Pile stiffness (EI) (kg-cm^2) | 6.24×10^{10} | 1.24×10^{10} 1.57×10^{11} |
| Effective strut stiffness (kg/cm) | 1×10^5 | 1×10^4 1×10^6 |
| Prestress (percent of maximum basic values) | 0 | 50 75 100 |
| Vertical strut spacing (m) | 2 | 3 4 |
| Horizontal strut spacing (m) | 3 | None |
| <i>General Conditions</i> | | |
| Depth of soil (m) | 15 | None |
| Depth of pile penetration (m) | 15 | None |
| Width of excavation (m) | 12 | None |
| Final depth of excavation (m) | 10 | None |
| Number of elements: | | |
| pile | 150 | None |
| 'active' soil mass | 48 | 90 |
| 'passive' soil mass | 45 | None |



Instrumented Section - Waterland I

Construction Sequence

| Computer (Stage) | Actual (Days) | Elev. (m) |
|------------------|---------------|-----------|
| 0 | 0 | + 2.5 |
| 1 | 6 | + 1.0 |
| 2 | 13 | 0.0 |
| 3 | 25 | - 1.0 |
| 4 | 32 | - 2.0 |
| 5 | 34 | - 3.0 |
| 6 | 44 | - 4.0 |
| 7 | 46 | - 5.0 |
| 8 | 71 | - 6.0 |
| | 73 | - 7.0 |
| | | - 8.0 |
| | | - 9.5 |
| | | - 11.5 |
| | | - 13.4 |



Finite Element Configuration

FIG. 2. Case study details of the Waterland I site

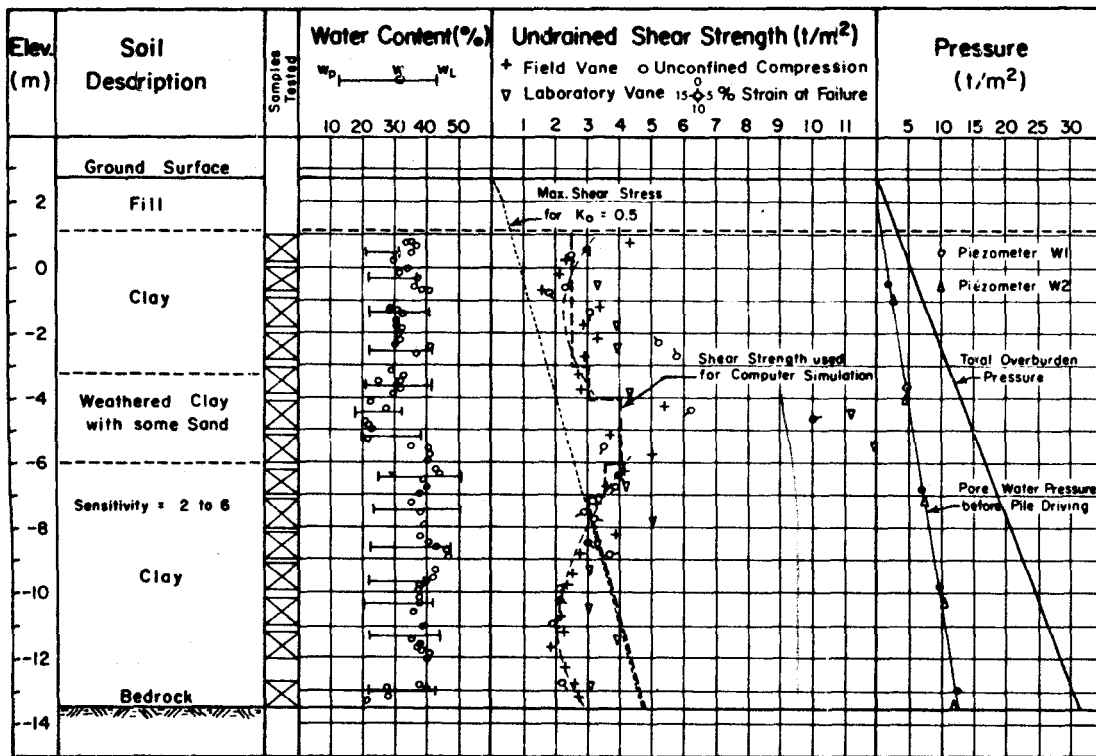


FIG. 3. Typical soil properties — Vaterland 1 site

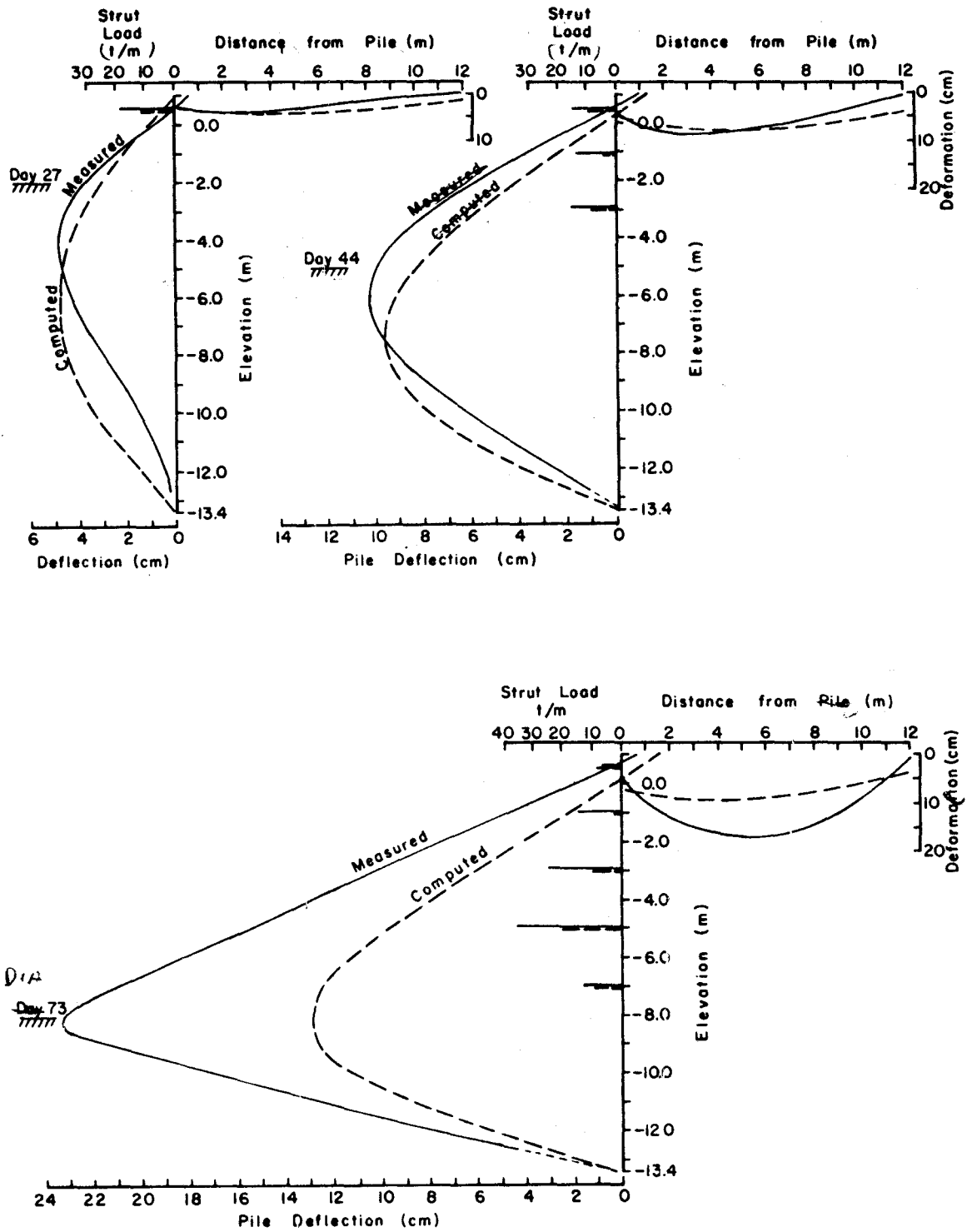
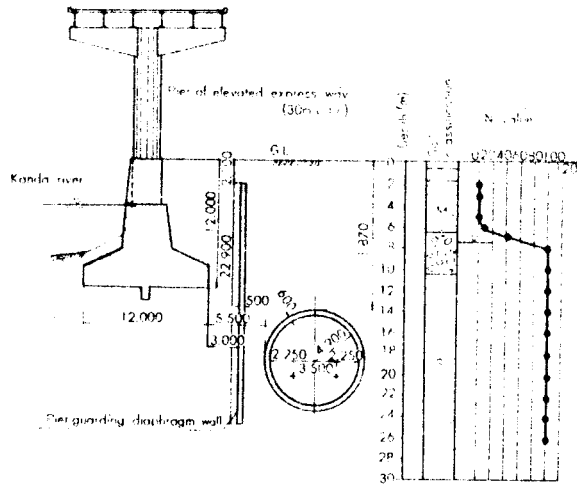
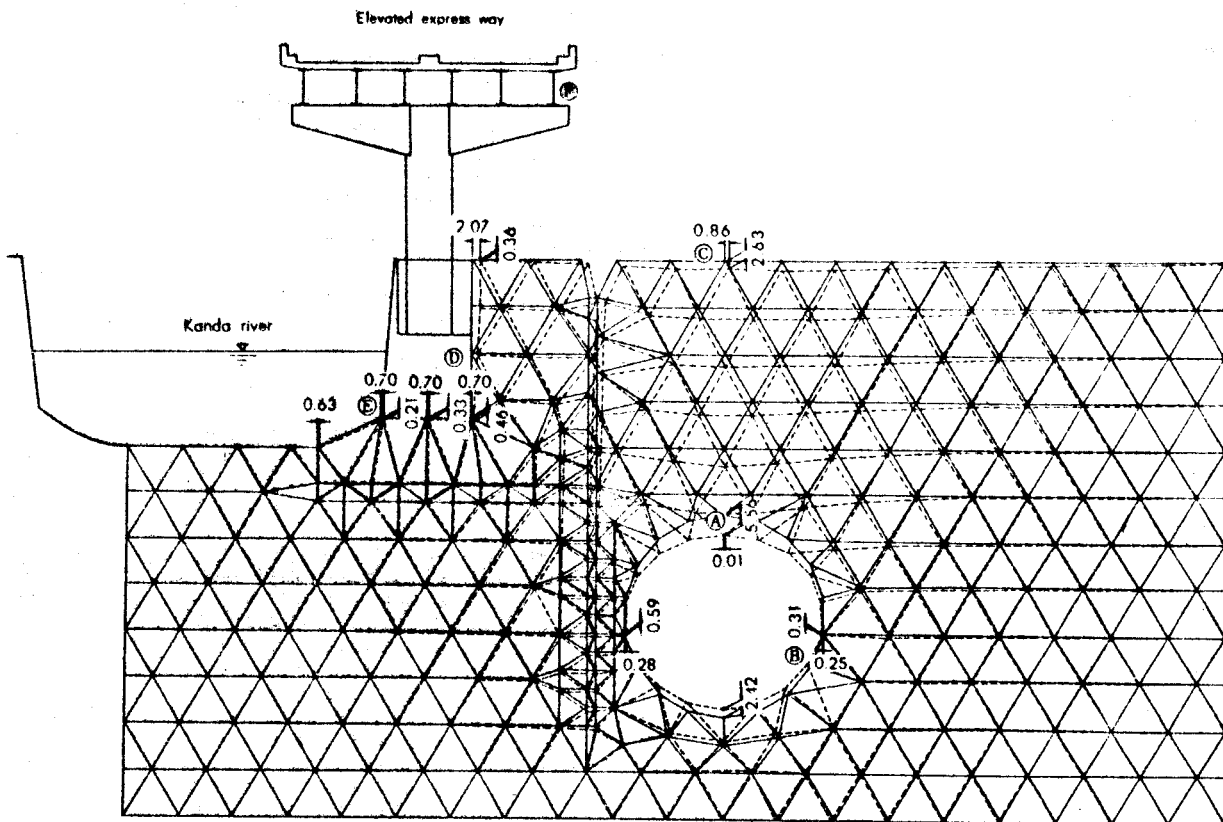


FIG. 4. Comparison of field measurements with the computer simulation — Vaterland 1



Subway tunnel built close to elevated expressway



Ground displacement caused by excavation