Teoria do Consumidor (Parte 3)

Aula 03

Rogério Mazali

Microeconomia I

01/09/2020

Propriedades da Função Demanda Marshalliana

Revisão

- Na aula passada, vimos que a função demanda é a solução do problema de maximização do consumidor:

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+} u(\mathbf{x}) \qquad \text{sujeito a} \qquad \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y. \tag{1}$$

Propriedades da Função Demanda Marshalliana

Revisão

- Na aula passada, vimos que a função demanda é a solução do problema de maximização do consumidor:

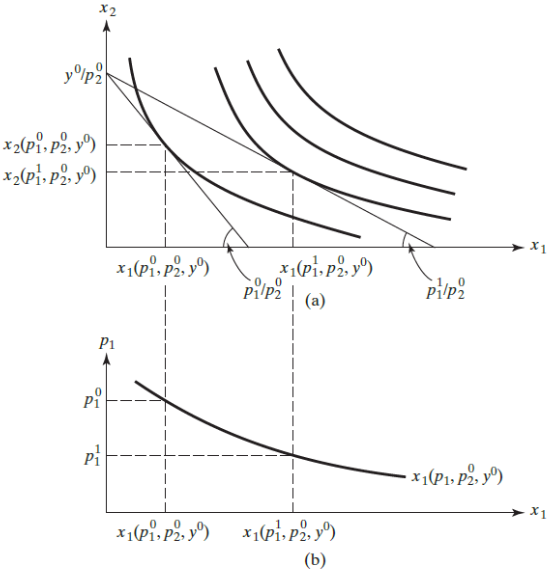
$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+} u(\mathbf{x}) \qquad \text{sujeito a} \qquad \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y. \tag{1}$$

- Uma solução $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\mathbf{p}, y)$ para (1) deve satisfazer as condições de primeira ordem:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} - \lambda^* p_i = 0, \tag{2}$$

para todo $i = \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* - y = \mathbf{0}. \tag{3}$$


x_2
y^0/p_2^0
$x_2(p_1^0, p_2^0, y^0)$
$x_2(p_1^1, p_2^0, y^0)$
x_1
$x_1(p_1^0, p_2^0, y^0)$
$x_1(p_1^1, p_2^0, y^0)$
p_1^0/p_2^0
p_1^1/p_2^0
(a)
p_1
p_1^0
p_1^1
$x_1(p_1, p_2^0, y^0)$
x_1
$x_1(p_1^0, p_2^0, y^0)$
$x_1(p_1^1, p_2^0, y^0)$
(b)

- Gostaríamos que nossa função demanda pudesse ter certas propriedades.

- Gostaríamos que nossa função demanda pudesse ter certas propriedades.
- Com os Axiomas 1 a 5, já garantimos que ela é contínua.

- Gostaríamos que nossa função demanda pudesse ter certas propriedades.
- Com os Axiomas 1 a 5, já garantimos que ela é contínua.
- Mas também gostaríamos de obter uma função demanda que seja diferenciável.

Propriedades da Função Demanda Marshalliana

- Gostaríamos que nossa função demanda pudesse ter certas propriedades.
- Com os Axiomas 1 a 5, já garantimos que ela é contínua.
- Mas também gostaríamos de obter uma função demanda que seja diferenciável.
- Assim poderíamos expor as condições suficientes para um máximo em função das derivadas de ordem superior da função utilidade.

- Gostaríamos que nossa função demanda pudesse ter certas propriedades.
- Com os Axiomas 1 a 5, já garantimos que ela é contínua.
- Mas também gostaríamos de obter uma função demanda que seja diferenciável.
- Assim poderíamos expor as condições suficientes para um máximo em função das derivadas de ordem superior da função utilidade.
- Assim, iremos supor que essas condições valem e que temos uma função $\mathbf{x}(\mathbf{p}, y)$ diferenciável.

Theorem (Demanda Diferenciável)

Seja $\mathbf{x}^* \gg 0$ *uma solução para o problema do consumidor. aos preços* $\mathbf{p}^0 \gg 0$ *e renda* $y^0 > 0$*. Se: (i)* $u(\cdot)$ *é uma função duas vezes diferenciável no* $\mathbb{R}^n_{++}$*; (ii)* $\partial u(\mathbf{x}^*)/\partial x_i > 0$ *para algum* $i = 1, \ldots, n$*, e (iii) o Hessiano Orlado de* $u(\cdot)$ *possui um determinante não-nulo em* $\mathbf{x}^*$*, então* $\mathbf{x}(\mathbf{p}, y)$ *é diferenciável em* $(\mathbf{p}^0, y^0)$ *.*

Função Utilidade Indireta

Definição

- A função utilidade $u(\mathbf{x})$ representa as preferências do consumidor de forma direta.

- A função utilidade $u(\mathbf{x})$ representa as preferências do consumidor de forma direta.
- Por isso é chamada de **função utilidade direta**.

- A função utilidade $u(\mathbf{x})$ representa as preferências do consumidor de forma direta.
- Por isso é chamada de **função utilidade direta**.
- Em oposição, temos a chamada **função utilidade indireta**, definida como uma função $v : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$v(\mathbf{p},y) = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+} u(\mathbf{x}) \qquad \text{sujeito a} \qquad \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y. \tag{4}$$

Função Utilidade Indireta

A função

- $v(\mathbf{p}, y)$ é a função de valor máximo correspondente ao problema de maximização do consumidor.

Função Utilidade Indireta
A função

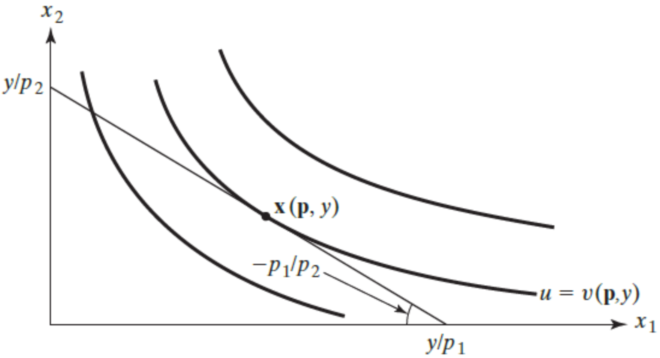
- $v(\mathbf{p},y)$ é a função de valor máximo correspondente ao problema de maximização do consumidor.
- Se a solução do problema do consumidor nos dá a função demanda $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\mathbf{p},y)$, então podemos escrever a função utilidade indireta como:

$$v(\mathbf{p},y) = u\left(\mathbf{x}(\mathbf{p},y)\right)$$

ou, alternativamente,

$$v(\mathbf{p},y) = (u \circ \mathbf{x})\,(\mathbf{p},y).$$

Função Utilidade Indireta
A função



- As suposições que fizemos com relação ao comportamento do consumidor nos garantem que $v(\mathbf{p},y)$ terá certas propriedades.

- As suposições que fizemos com relação ao comportamento do consumidor nos garantem que $v(\mathbf{p},y)$ terá certas propriedades.
- Essas propriedades são bastante convenientes pois nos permitem usar ferramentas de cálculo com a função $v(\mathbf{p},y)$.

- As suposições que fizemos com relação ao comportamento do consumidor nos garantem que $v(\mathbf{p},y)$ terá certas propriedades.
- Essas propriedades são bastante convenientes pois nos permitem usar ferramentas de cálculo com a função $v(\mathbf{p},y)$.
- Essas propriedades estão listadas na proposição a seguir.

Theorem (Propriedades da Função Utilidade Indireta)

Se $u(\mathbf{x})$ *for contínua e estritamente crescentes em* $\mathbb{R}^n_+$, *então* $v(\mathbf{p},y)$ *é:*
(1) contínua em $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}$*;*
(2) homogênea de grau zero em $(\mathbf{p},y)$*;*
(3) estritamente crescente em y*;*
(4) decrescente em $\mathbf{p}$*;*
(5) quasiconvexa em $(\mathbf{p},y)$*;*
(6) Identidade de Roy: se $v(\mathbf{p},y)$ *for diferenciável em* $(\mathbf{p}^0,y^0)$ *e* $\partial v(\mathbf{p}^0,y^0)/\partial y > 0$, *então:*

$$x_i(\mathbf{p}^0,y^0) = -\frac{\partial v(\mathbf{p}^0,y^0)/\partial p_i}{\partial v(\mathbf{p}^0,y^0)/\partial y}, \quad \textit{para } i = 1,\ldots,n.$$

Prova da Propriedade 1.

$v(\mathbf{p},y) = (u \circ \mathbf{x})(\mathbf{p},y)$ é a composta das funções contínuas $u(\cdot)$ e $\mathbf{x}(\cdot)$. Portanto, $v(\mathbf{p},y)$ é contínua. $\square$

Prova da Propriedade 2.

Temos que provar que $v(\mathbf{p}, y) = v(t\mathbf{p}, ty)$, para todo $t > 0$. Mas

$$v(t\mathbf{p}, ty) = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+} u(\mathbf{x}) \qquad \text{sujeito a} \qquad t\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq ty.$$

Dividindo ambos os lados da restrição orçamentária deste problema nos dá:

$$v(t\mathbf{p}, ty) = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+} u(\mathbf{x}) \qquad \text{sujeito a} \qquad \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y.$$

Mas o lado direito da equação acima é a definição de $v(\mathbf{p}, y)$. Portanto, $v(t\mathbf{p}, ty) = v(\mathbf{p}, y)$. □

Prova da Propriedade 3 (versão simplificada).

Suponha que a solução para (1) seja $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\mathbf{p}, y) \gg \mathbf{0}$ (solução interior) e que $\mathbf{x}(\mathbf{p}, y)$ é diferenciável com $\partial u / \partial x_i > 0$ para todo $\mathbf{x} \gg \mathbf{0}$. Portanto, a restrição orçamentária vale com igualdade e a utilidade indireta pode ser escrita como:

$$v(\mathbf{p}, y) = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+} u(\mathbf{x}) \qquad \text{sujeito a} \qquad \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = y.$$

Aplicando o Teorema da Envoltória (ou Envelope) às condições de primeira ordem:

$$\frac{\partial v(\mathbf{p}, y)}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*)}{\partial y} = \lambda^* > 0.$$

□

Prova da Propriedade 4 (versão simplificada).

Suponha que a solução para (1) seja $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\mathbf{p},y) \gg \mathbf{0}$ (solução interior) e que $\mathbf{x}(\mathbf{p},y)$ é diferenciável com $\partial u/\partial x_i > 0$ para todo $\mathbf{x} \gg \mathbf{0}$. Portanto, a restrição orçamentária vale com igualdade e a utilidade indireta pode ser escrita como:

$$v(\mathbf{p},y) = \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n_+} u(\mathbf{x}) \qquad \text{sujeito a} \qquad \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} = y.$$

Aplicando o Teorema da Envoltória (ou Envelope) às condições de primeira ordem:

$$\frac{\partial v(\mathbf{p},y)}{\partial p_i} = \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^*,\lambda^*)}{\partial p_i} = -\lambda^* x_i^* < 0.$$

□

Prova da Propriedade 5.

Sejam $(\mathbf{p}^1, y^1)$ e $(\mathbf{p}^2, y^2)$ dois vetores preço-renda, e defina $(\mathbf{p}^t, y^t)$ tal que $\mathbf{p}^t = t\mathbf{p}^1 + (1-t)\mathbf{p}^2$ e $y^t = ty^1 + (1-t)y^2$. Temos que mostrar que $v(\mathbf{p}^t, y^t) \leq \max\left\{v(\mathbf{p}^1, y^1), v(\mathbf{p}^2, y^2)\right\}$ para todo $t \in [0,1]$. Defina $B^j = \left\{\mathbf{x} \,\middle|\, \mathbf{p}^j \cdot \mathbf{x} \leq y^j\right\}$, para $j = 1, 2, t$. Queremos mostrar que

$$\mathbf{x} \in B^t \Rightarrow \mathbf{x} \in \left(B^1 \cup B^2\right). \tag{5}$$

Se $t = 0$ ou $t = 1$, $B^t = B^1$ ou $B^t = B^2$ e a relação é satisfeita trivialmente. □

Prova da Propriedade 5 (continuação).

Para $t \in (0,1)$, suponha que (5) seja falsa. Então podemos achar um $t \in (0,1)$ e $\mathbf{x} \in B^t$ tal que $\mathbf{x} \notin B^1$ e $\mathbf{x} \notin B^2$. Se $\mathbf{x} \notin B^1$ e $\mathbf{x} \notin B^2$, então

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x} &> y^1 \\ \mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{x} &> y^2 \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira R.O. por t e a segunda por $(1-t)$, obtemos:

$$\begin{array}{c} t\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x} > ty^1 \\ (1-t)\mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{x} > (1-t)y^2 \\ \hline t\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x} + (1-t)\mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{x} > ty^1 + (1-t)y^2, \end{array}$$

isto é, $\mathbf{p}^t \cdot \mathbf{x} > y^t$ e, portanto, $\mathbf{x} \notin B^t$, uma contradição. □

Prova da Propriedade 6.

Seja $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\mathbf{p},y) \gg \mathbf{0}$ uma solução para o problema (1). Então, pelo Teorema da Envoltória,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\mathbf{p},y)}{\partial y} &= \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*)}{\partial y} = \lambda^*, \\ \frac{\partial v(\mathbf{p},y)}{\partial p_i} &= \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*)}{\partial p_i} = -\lambda^* x_i^*. \end{aligned}$$

Reescrevendo a segunda equação:

$$-\frac{1}{x_i^*}.\frac{\partial v(\mathbf{p},y)}{\partial p_i} = \lambda^*$$

$\square$

Prova da Propriedade 6 (continuação).

Igualando λ^* em ambas as equações:

$$\frac{1}{x_i^*}.\frac{\partial v(\mathbf{p},y)}{\partial p_i} = \frac{\partial v(\mathbf{p},y)}{\partial y}$$

Rearranjando os termos obtemos a Identidade de Roy:

$$x_i^* = x_i(\mathbf{p},y) - \frac{\partial v(\mathbf{p},y)/\partial p_i}{\partial v(\mathbf{p},y)/\partial y}$$

$\square$