

Jogos Estritamente Competitivos e Estratégias Mistas

Aula 06

Rogério Mazali

Microeconomia IV

1o. semestre 2016

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Definição

- Suponha um jogo com dois jogadores: A e B.

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Definição

- Suponha um jogo com dois jogadores: A e B.
- Dizemos que este jogo é **Estritamente Competitivo** ou **de Soma Zero** se podemos escrever sua matriz de recompensas na forma:

$$U_A(s_i^A, s_j^B) = -U_B(s_i^A, s_j^B)$$

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Definição

- Suponha um jogo com dois jogadores: A e B.
- Dizemos que este jogo é **Estritamente Competitivo** ou **de Soma Zero** se podemos escrever sua matriz de recompensas na forma:

$$U_A(s_i^A, s_j^B) = -U_B(s_i^A, s_j^B)$$

- Analogamente, podemos definir um Jogo Estritamente Competitivo ou de Soma Zero como sendo um jogo em que, toda vez que um jogador melhora sua situação ao jogar uma determinada estratégia, seus oponentes necessariamente precisam piorar, isto é, se

$$U_A(s_i^A, s_j^B) \geq U_A(s_j^A, s_i^B) \Leftrightarrow U_B(s_i^A, s_j^B) \leq U_B(s_j^A, s_i^B)$$

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Definição

- Suponha um jogo com dois jogadores: A e B.
- Dizemos que este jogo é **Estritamente Competitivo** ou **de Soma Zero** se podemos escrever sua matriz de recompensas na forma:

$$U_A(s_i^A, s_j^B) = -U_B(s_i^A, s_j^B)$$

- Analogamente, podemos definir um Jogo Estritamente Competitivo ou de Soma Zero como sendo um jogo em que, toda vez que um jogador melhora sua situação ao jogar uma determinada estratégia, seus oponentes necessariamente precisam piorar, isto é, se

$$U_A(s_i^A, s_j^B) \geq U_A(s_j^A, s_i^B) \Leftrightarrow U_B(s_i^A, s_j^B) \leq U_B(s_j^A, s_i^B)$$

- Como sempre podemos reescrever as funções de recompensa, ao aplicarmos uma transformação monotônica na original, sempre poderemos escrever funções de recompensa na forma da primeira equação da página.

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Exemplo: Jogo de Par-ou-Ímpar

- Exemplo: jogo de par-ou-ímpar

		Jogador Ímpar	
		<i>Par</i>	<i>Ímpar</i>
Jogador Par	<i>Par</i>	+1, -1	-1, +1
	<i>Ímpar</i>	-1, +1	+1, -1

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Exemplo: Jogo de Par-ou-Ímpar

- Exemplo: jogo de par-ou-ímpar
 - Cada indivíduo escolhe um grupo de números: “par” ou “ímpar”;

	Jogador Ímpar	
	<i>Par</i>	<i>Ímpar</i>
Jogador Par		
<i>Par</i>	+1, -1	-1, +1
<i>Ímpar</i>	-1, +1	+1, -1

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Exemplo: Jogo de Par-ou-Ímpar

- Exemplo: jogo de par-ou-ímpar
 - Cada indivíduo escolhe um grupo de números: “par” ou “ímpar”;
 - Cada indivíduo então simultaneamente escolhe um número entre 0 e 10.

	Jogador Ímpar	
	<i>Par</i>	<i>Ímpar</i>
Jogador Par		
<i>Par</i>	+1, -1	-1, +1
<i>Ímpar</i>	-1, +1	+1, -1

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Exemplo: Jogo de Par-ou-Ímpar

- Exemplo: jogo de par-ou-ímpar
 - Cada indivíduo escolhe um grupo de números: “par” ou “ímpar”;
 - Cada indivíduo então simultaneamente escolhe um número entre 0 e 10.
 - Os números são mostrados simultaneamente.

	Jogador Ímpar	
	<i>Par</i>	<i>Ímpar</i>
Jogador Par		
<i>Par</i>	+1, -1	-1, +1
<i>Ímpar</i>	-1, +1	+1, -1

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Exemplo: Jogo de Par-ou-Ímpar

- Exemplo: jogo de par-ou-ímpar
 - Cada indivíduo escolhe um grupo de números: “par” ou “ímpar”;
 - Cada indivíduo então simultaneamente escolhe um número entre 0 e 10.
 - Os números são mostrados simultaneamente.
 - Se a soma der par, o jogador “par” vence, se der ímpar, o jogador “ímpar vence”.

	Jogador Ímpar	
	<i>Par</i>	<i>Ímpar</i>
Jogador Par		
<i>Par</i>	+1, -1	-1, +1
<i>Ímpar</i>	-1, +1	+1, -1

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Exemplo: Jogo de Par-ou-Ímpar

- Exemplo: jogo de par-ou-ímpar
 - Cada indivíduo escolhe um grupo de números: “par” ou “ímpar”;
 - Cada indivíduo então simultaneamente escolhe um número entre 0 e 10.
 - Os números são mostrados simultaneamente.
 - Se a soma der par, o jogador “par” vence, se der ímpar, o jogador “ímpar vence”.
 - O perdedor paga \$1 ao vencedor.

	Jogador Ímpar	
	<i>Par</i>	<i>Ímpar</i>
Jogador Par		
<i>Par</i>	+1, -1	-1, +1
<i>Ímpar</i>	-1, +1	+1, -1

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Exemplo: Jogo do Apadrinhamento

- Mesmo jogos que aparentemente não são de Soma Zero podem ser rapidamente convertidos se aplicarmos uma transformação monotônica na função recompensa de um dos jogadores.

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Exemplo: Jogo do Apadrinhamento

- Mesmo jogos que aparentemente não são de Soma Zero podem ser rapidamente convertidos se aplicarmos uma transformação monotônica na função recompensa de um dos jogadores.
- **Exemplo: Jogo do Apadrinhamento**

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Exemplo: Jogo do Apadrinhamento

- Mesmo jogos que aparentemente não são de Soma Zero podem ser rapidamente convertidos se aplicarmos uma transformação monotônica na função recompensa de um dos jogadores.
- **Exemplo: Jogo do Apadrinhamento**
 - Dois candidatos disputam uma eleição: Situação e Oposição;

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Exemplo: Jogo do Apadrinhamento

- Mesmo jogos que aparentemente não são de Soma Zero podem ser rapidamente convertidos se aplicarmos uma transformação monotônica na função recompensa de um dos jogadores.
- **Exemplo: Jogo do Apadrinhamento**
 - Dois candidatos disputam uma eleição: Situação e Oposição;
 - Se prometerem cargos a aliados políticos, podem aumentar suas chances de eleição.

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Exemplo: Jogo do Apadrinhamento

- Mesmo jogos que aparentemente não são de Soma Zero podem ser rapidamente convertidos se aplicarmos uma transformação monotônica na função recompensa de um dos jogadores.
- **Exemplo: Jogo do Apadrinhamento**
 - Dois candidatos disputam uma eleição: Situação e Oposição;
 - Se prometerem cargos a aliados políticos, podem aumentar suas chances de eleição.
 - A Situação tem uma vantagem:

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Exemplo: Jogo do Apadrinhamento

- Mesmo jogos que aparentemente não são de Soma Zero podem ser rapidamente convertidos se aplicarmos uma transformação monotônica na função recompensa de um dos jogadores.
- **Exemplo: Jogo do Apadrinhamento**
 - Dois candidatos disputam uma eleição: Situação e Oposição;
 - Se prometerem cargos a aliados políticos, podem aumentar suas chances de eleição.
 - A Situação tem uma vantagem:
 - Sem ambos prometem cargos públicos a seus aliados, cada um tem 50% de chance de vencer;

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Exemplo: Jogo do Apadrinhamento

- Mesmo jogos que aparentemente não são de Soma Zero podem ser rapidamente convertidos se aplicarmos uma transformação monotônica na função recompensa de um dos jogadores.
- **Exemplo: Jogo do Apadrinhamento**
 - Dois candidatos disputam uma eleição: Situação e Oposição;
 - Se prometerem cargos a aliados políticos, podem aumentar suas chances de eleição.
 - A Situação tem uma vantagem:
 - Sem ambos prometem cargos públicos a seus aliados, cada um tem 50% de chance de vencer;
 - Se Oposição Promete e Situação não, Oposição tem 60% de chances de vencer;

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Exemplo: Jogo do Apadrinhamento

- Mesmo jogos que aparentemente não são de Soma Zero podem ser rapidamente convertidos se aplicarmos uma transformação monotônica na função recompensa de um dos jogadores.
- **Exemplo: Jogo do Apadrinhamento**
 - Dois candidatos disputam uma eleição: Situação e Oposição;
 - Se prometerem cargos a aliados políticos, podem aumentar suas chances de eleição.
 - A Situação tem uma vantagem:
 - Sem ambos prometem cargos públicos a seus aliados, cada um tem 50% de chance de vencer;
 - Se Oposição Promete e Situação não, Oposição tem 60% de chances de vencer;
 - Se Situação Promete e Oposição não, Oposição em 20% de chances de vencer;

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Exemplo: Jogo do Apadrinhamento

- Mesmo jogos que aparentemente não são de Soma Zero podem ser rapidamente convertidos se aplicarmos uma transformação monotônica na função recompensa de um dos jogadores.
- **Exemplo: Jogo do Apadrinhamento**
 - Dois candidatos disputam uma eleição: Situação e Oposição;
 - Se prometerem cargos a aliados políticos, podem aumentar suas chances de eleição.
 - A Situação tem uma vantagem:
 - Sem ambos prometem cargos públicos a seus aliados, cada um tem 50% de chance de vencer;
 - Se Oposição Promete e Situação não, Oposição tem 60% de chances de vencer;
 - Se Situação Promete e Oposição não, Oposição em 20% de chances de vencer;
 - Se ninguém promete cargos, Oposição tem 40% de chances de vencer.

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Exemplo: Jogo do Apadrinhamento

- Matriz de Recompensas:

Oposição	Situação	
	<i>Promete</i>	<i>Não Promete</i>
<i>Promete</i>	50%, 50%	60%, 40%
<i>Não Promete</i>	20%, 80%	40%, 60%

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Exemplo: Jogo do Apadrinhamento

- Matriz de Recompensas:

Oposição	Situação	
	<i>Promete</i>	<i>Não Promete</i>
<i>Promete</i>	50%, 50%	60%, 40%
<i>Não Promete</i>	20%, 80%	40%, 60%

- Podemos reescrever a matriz de pagamentos subtraindo 1 das recompensas de Situação.

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Exemplo: Jogo do Apadrinhamento

- Subtraindo 1 das recompensas de Situação, a Matriz de Recompensas fica:

Oposição	Situação	
	<i>Promete</i>	<i>Não Promete</i>
<i>Promete</i>	0, 5; -0, 5	0, 6; -0, 6
<i>Não Promete</i>	0, 2; -0, 2	0, 4; -0, 4

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Exemplo: Jogo do Apadrinhamento

- Subtraindo 1 das recompensas de Situação, a Matriz de Recompensas fica:

Oposição	Situação	
	<i>Promete</i>	<i>Não Promete</i>
<i>Promete</i>	0, 5; -0, 5	0, 6; -0, 6
<i>Não Promete</i>	0, 2; -0, 2	0, 4; -0, 4

- Portanto, o Jogo de Recompensas é um Jogo de Soma Zero.

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Estratégias Minimax e Maximin

- Por que é importante estudarmos Jogos de Soma Zero separadamente?

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Estratégias Minimax e Maximin

- Por que é importante estudarmos Jogos de Soma Zero separadamente?
- Porque podemos encontrar Equilíbrios de Nash em jogos desse tipo analisando um grupo de estratégias muito especial: estratégias **minimax** e **maximin**.

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Estratégias Minimax e Maximin

- Por que é importante estudarmos Jogos de Soma Zero separadamente?
- Porque podemos encontrar Equilíbrios de Nash em jogos desse tipo analisando um grupo de estratégias muito especial: estratégias **minimax** e **maximin**.
- No que consistem essas estratégias?

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Estratégias Minimax e Maximin

- Por que é importante estudarmos Jogos de Soma Zero separadamente?
- Porque podemos encontrar Equilíbrios de Nash em jogos desse tipo analisando um grupo de estratégias muito especial: estratégias **minimax** e **maximin**.
- No que consistem essas estratégias?
 - Elas consistem, basicamente, em minimizar os danos que seus oponentes podem fazer a você.

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Estratégias Minimax e Maximin

- Por que é importante estudarmos Jogos de Soma Zero separadamente?
- Porque podemos encontrar Equilíbrios de Nash em jogos desse tipo analisando um grupo de estratégias muito especial: estratégias **minimax** e **maximin**.
- No que consistem essas estratégias?
 - Elas consistem, basicamente, em minimizar os danos que seus oponentes podem fazer a você.
 - Em um jogo de soma zero, maximizar seu payoff implica em infligir danos aos seus oponentes.

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Estratégias Minimax e Maximin

- Por que é importante estudarmos Jogos de Soma Zero separadamente?
- Porque podemos encontrar Equilíbrios de Nash em jogos desse tipo analisando um grupo de estratégias muito especial: estratégias **minimax** e **maximin**.
- No que consistem essas estratégias?
 - Elas consistem, basicamente, em minimizar os danos que seus oponentes podem fazer a você.
 - Em um jogo de soma zero, maximizar seu payoff implica em infligir danos aos seus oponentes.
 - Ao minimizar os danos que seu oponente lhe causa, você estará implicitamente maximizando sua recompensa.

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Estratégias Minimax e Maximin

- Formalmente, podemos escrever, em um jogo com dois jogadores, obtemos a estratégia minimax como sendo:

$$t^* = \arg \min_t \max_s u(s, t)$$

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Estratégias Minimax e Maximin

- Formalmente, podemos escrever, em um jogo com dois jogadores, obtemos a estratégia minimax como sendo:

$$t^* = \arg \min_t \max_s u(s, t)$$

- Dado que o oponente irá maximizar sua recompensa (representado pelo trecho $\max_s u(s, t)$), e seu oponente maximiza sua recompensa lhe inflingindo máximo dano, irá escolher uma estratégia que minimiza esse dano inflingido pelo oponente (representado pelo segundo processo de otimização, $\min_t u(s^*, t)$, onde $s^* = \arg \max_s u(s, t)$).

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Estratégias Minimax e Maximin

- Formalmente, podemos escrever, em um jogo com dois jogadores, obtemos a estratégia minimax como sendo:

$$t^* = \arg \min_t \max_s u(s, t)$$

- Dado que o oponente irá maximizar sua recompensa (representado pelo trecho $\max_s u(s, t)$), e seu oponente maximiza sua recompensa lhe inflingindo máximo dano, irá escolher uma estratégia que minimiza esse dano inflingido pelo oponente (representado pelo segundo processo de otimização, $\min_t u(s^*, t)$, onde $s^* = \arg \max_s u(s, t)$).
- Como encontrar o resultado de uma estratégia minimax?

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Estratégias Minimax e Maximin

- Formalmente, podemos escrever, em um jogo com dois jogadores, obtemos a estratégia minimax como sendo:

$$t^* = \arg \min_t \max_s u(s, t)$$

- Dado que o oponente irá maximizar sua recompensa (representado pelo trecho $\max_s u(s, t)$), e seu oponente maximiza sua recompensa lhe inflingindo máximo dano, irá escolher uma estratégia que minimiza esse dano inflingido pelo oponente (representado pelo segundo processo de otimização, $\min_t u(s^*, t)$, onde $s^* = \arg \max_s u(s, t)$).
- Como encontrar o resultado de uma estratégia minimax?
- Considere o jogo do apadrinhamento do slide 3.

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Estratégias Minimax e Maximin

- Formalmente, podemos escrever, em um jogo com dois jogadores, obtemos a estratégia minimax como sendo:

$$t^* = \arg \min_t \max_s u(s, t)$$

- Dado que o oponente irá maximizar sua recompensa (representado pelo trecho $\max_s u(s, t)$), e seu oponente maximiza sua recompensa lhe inflingindo máximo dano, irá escolher uma estratégia que minimiza esse dano inflingido pelo oponente (representado pelo segundo processo de otimização, $\min_t u(s^*, t)$, onde $s^* = \arg \max_s u(s, t)$).
- Como encontrar o resultado de uma estratégia minimax?
- Considere o jogo do apadrinhamento do slide 3.
- Podemos escrever os payoffs apenas do jogador Oposição: o payoff do jogador Situação fica implicitamente determinado como o simétrico do payoff da Oposição.

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Estratégias Minimax e Maximin

Oposição	Situação	
	<i>Promete</i>	<i>Não Promete</i>
<i>Promete</i>	0, 5	0, 6
<i>Não Promete</i>	0, 2	0, 4

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Estratégias Minimax e Maximin

- Estamos considerando, primeiramente, apenas o jogador linha: Oposição.

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Estratégias Minimax e Maximin

- Estamos considerando, primeiramente, apenas o jogador linha: Oposição.
- Se a Situação Promete, a Oposição escolherá Prometer.

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Estratégias Minimax e Maximin

- Estamos considerando, primeiramente, apenas o jogador linha: Oposição.
- Se a Situação Promete, a Oposição escolherá Prometer.
- Se a Situação Não Promete, a Oposição escolherá Prometer.

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Estratégias Minimax e Maximin

- Estamos considerando, primeiramente, apenas o jogador linha: Oposição.
- Se a Situação Promete, a Oposição escolherá Prometer.
- Se a Situação Não Promete, a Oposição escolherá Prometer.
- A Situação escolherá agora a estratégia que lhe causa menos dano: Prometer.

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Estratégias Minimax e Maximin

- Analogamente, podemos olhar o que faz o jogador coluna: Situação.

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Estratégias Minimax e Maximin

- Analogamente, podemos olhar o que faz o jogador coluna: Situação.
- Se a Oposição Promete, a Situação escolhe Prometer.

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Estratégias Minimax e Maximin

- Analogamente, podemos olhar o que faz o jogador coluna: Situação.
- Se a Oposição Promete, a Situação escolhe Prometer.
- Se a Oposição Não Promete, a Situação escolhe Prometer.

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Estratégias Minimax e Maximin

- Analogamente, podemos olhar o que faz o jogador coluna: Situação.
- Se a Oposição Promete, a Situação escolhe Prometer.
- Se a Oposição Não Promete, a Situação escolhe Prometer.
- A Oposição escolherá agora a estratégia que lhe causa menos dano: o maior dos dois números: Prometer.

Jogos Estritamente Competitivos ou de Soma Zero

Estratégias Minimax e Maximin

- Analogamente, podemos olhar o que faz o jogador coluna: Situação.
- Se a Oposição Promete, a Situação escolhe Prometer.
- Se a Oposição Não Promete, a Situação escolhe Prometer.
- A Oposição escolherá agora a estratégia que lhe causa menos dano: o maior dos dois números: Prometer.
- Por olharmos esses números como num espelho, chamamos esta estratégia de **maximin**, apesar de, conceitualmente, apenas ser a aplicação do minimax para o outro jogador.

Estratégias Mistas

Introdução

- Até agora, só vimos situações nas quais indivíduos jogam estratégias que prescrevem ações a serem executadas com certeza.

Estratégias Mistas

Introdução

- Até agora, só vimos situações nas quais indivíduos jogam estratégias que prescrevem ações a serem executadas com certeza.
- No entanto, em muitos casos, não há razão para se esperar que um jogador execute uma dada ação com certeza.

Estratégias Mistas

Introdução

- Até agora, só vimos situações nas quais indivíduos jogam estratégias que prescrevem ações a serem executadas com certeza.
- No entanto, em muitos casos, não há razão para se esperar que um jogador execute uma dada ação com certeza.
- **Exemplo:** cobranças de penalty no futebol.

Estratégias Mistas

Introdução

- Até agora, só vimos situações nas quais indivíduos jogam estratégias que prescrevem ações a serem executadas com certeza.
- No entanto, em muitos casos, não há razão para se esperar que um jogador execute uma dada ação com certeza.
- **Exemplo:** cobranças de penalty no futebol.
 - goleiro não tem razão para suspeitar que jogador vai cobrar em algum canto específico.

Estratégias Mistas

Introdução

- Até agora, só vimos situações nas quais indivíduos jogam estratégias que prescrevem ações a serem executadas com certeza.
- No entanto, em muitos casos, não há razão para se esperar que um jogador execute uma dada ação com certeza.
- **Exemplo:** cobranças de penalty no futebol.
 - goleiro não tem razão para suspeitar que jogador vai cobrar em algum canto específico.
 - Goleiro toma as decisões do jogador como aleatórias e vice-versa, mesmo que elas não sejam de fato aleatórias.

Estratégias Mistas

Introdução

- Até agora, só vimos situações nas quais indivíduos jogam estratégias que prescrevem ações a serem executadas com certeza.
- No entanto, em muitos casos, não há razão para se esperar que um jogador execute uma dada ação com certeza.
- **Exemplo:** cobranças de penalty no futebol.
 - goleiro não tem razão para suspeitar que jogador vai cobrar em algum canto específico.
 - Goleiro toma as decisões do jogador como aleatórias e vice-versa, mesmo que elas não sejam de fato aleatórias.
 - Decisões podem ser racionalmente vistas como aleatórias se bases para tomada de decisão do adversário não estejam disponíveis ao jogador.

Estratégias Mistas

Introdução

- Até agora, só vimos situações nas quais indivíduos jogam estratégias que prescrevem ações a serem executadas com certeza.
- No entanto, em muitos casos, não há razão para se esperar que um jogador execute uma dada ação com certeza.
- **Exemplo:** cobranças de penalty no futebol.
 - goleiro não tem razão para suspeitar que jogador vai cobrar em algum canto específico.
 - Goleiro toma as decisões do jogador como aleatórias e vice-versa, mesmo que elas não sejam de fato aleatórias.
 - Decisões podem ser racionalmente vistas como aleatórias se bases para tomada de decisão do adversário não estejam disponíveis ao jogador.
- Estratégias nas quais as ações a serem executadas pelos jogadores são incertas são chamadas de **estratégias mistas**.

Estratégias Mistas

Introdução

- Até agora, só vimos situações nas quais indivíduos jogam estratégias que prescrevem ações a serem executadas com certeza.
- No entanto, em muitos casos, não há razão para se esperar que um jogador execute uma dada ação com certeza.
- **Exemplo:** cobranças de penalty no futebol.
 - goleiro não tem razão para suspeitar que jogador vai cobrar em algum canto específico.
 - Goleiro toma as decisões do jogador como aleatórias e vice-versa, mesmo que elas não sejam de fato aleatórias.
 - Decisões podem ser racionalmente vistas como aleatórias se bases para tomada de decisão do adversário não estejam disponíveis ao jogador.
- Estratégias nas quais as ações a serem executadas pelos jogadores são incertas são chamadas de **estratégias mistas**.
- No exemplo, um jogador pode jogar uma moeda para cima, por exemplo, e se der cara cobrar o penalty no canto esquerdo, se der coroa, no direito.

Estratégias Mistas

Definição Formal de Estratégia Mista

Definition (Definição: Estratégias Mistas)

No jogo na forma normal $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$, suponha que $S_i = \{s_{i1}, \dots, s_{iK}\}$. Uma **estratégia mista** para um jogador i é uma distribuição de probabilidade $\sigma_i = \{\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{iK}\}$, onde $\sigma_{ik} \in [0, 1]$ para todo $k \in \{1, \dots, K\}$ e $\sigma_{i1} + \dots + \sigma_{iK} = 1$.

Estratégias Mistas

Introdução

- Exemplo: jogo de par-ou-ímpar

		Jogador Ímpar	
Jogador Par	Par	+1, -1	-1, +1
	Ímpar	-1, +1	+1, -1

Estratégias Mistas

Introdução

- Exemplo: jogo de par-ou-ímpar
 - Cada indivíduo escolhe um grupo de números: “par” ou “ímpar”;

		Jogador Ímpar	
Jogador Par	Par	+1, -1	-1, +1
	Ímpar	-1, +1	+1, -1

Estratégias Mistas

Introdução

- Exemplo: jogo de par-ou-ímpar
 - Cada indivíduo escolhe um grupo de números: “par” ou “ímpar”;
 - Cada indivíduo então simultaneamente escolhe um número entre 0 e 10.

		Jogador Ímpar	
Jogador Par	Par	Par	Ímpar
	Ímpar	+1, -1	-1, +1
	Par	-1, +1	+1, -1

Estratégias Mistas

Introdução

- Exemplo: jogo de par-ou-ímpar
 - Cada indivíduo escolhe um grupo de números: “par” ou “ímpar”;
 - Cada indivíduo então simultaneamente escolhe um número entre 0 e 10.
 - Os números são mostrados simultaneamente.

		Jogador Ímpar	
Jogador Par	Par	Par	Ímpar
	Par	+1, -1	-1, +1
Ímpar	Ímpar	-1, +1	+1, -1

Estratégias Mistas

Introdução

- Exemplo: jogo de par-ou-ímpar
 - Cada indivíduo escolhe um grupo de números: “par” ou “ímpar”;
 - Cada indivíduo então simultaneamente escolhe um número entre 0 e 10.
 - Os números são mostrados simultaneamente.
 - Se a soma der par, o jogador “par” vence, se der ímpar, o jogador “ímpar vence”.

		Jogador Ímpar	
Jogador Par	Par	+1, -1	-1, +1
	Ímpar	-1, +1	+1, -1

Estratégias Mistas

Introdução

- Exemplo: jogo de par-ou-ímpar
 - Cada indivíduo escolhe um grupo de números: “par” ou “ímpar”;
 - Cada indivíduo então simultaneamente escolhe um número entre 0 e 10.
 - Os números são mostrados simultaneamente.
 - Se a soma der par, o jogador “par” vence, se der ímpar, o jogador “ímpar vence”.
 - Considere este jogo como um jogo de soma-zero (perdedor paga R\$ 1 ao vencedor).

		Jogador Ímpar	
Jogador Par	Par	$+1, -1$	$-1, +1$
	Ímpar	$-1, +1$	$+1, -1$

Estratégias Mistas

Introdução

- Exemplo: jogo de par-ou-ímpar
 - Cada indivíduo escolhe um grupo de números: “par” ou “ímpar”;
 - Cada indivíduo então simultaneamente escolhe um número entre 0 e 10.
 - Os números são mostrados simultaneamente.
 - Se a soma der par, o jogador “par” vence, se der ímpar, o jogador “ímpar vence”.
 - Considere este jogo como um jogo de soma-zero (perdedor paga R\$ 1 ao vencedor).

		Jogador Ímpar	
Jogador Par	Par	$+1, -1$	$-1, +1$
	Ímpar	$-1, +1$	$+1, -1$

- Um exemplo de estratégia mista para o Jogador Par neste jogo consiste em jogar um número par com probabilidade $2/3$ e um ímpar com probabilidade $1/3$.

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- No jogo de par-ou-ímpar, não há Equilíbrios de Nash com Estratégias Puras.

		Jogador Ímpar	
		<i>Par</i>	<i>Ímpar</i>
Jogador Par	<i>Par</i>	+1, -1	-1, +1
	<i>Ímpar</i>	-1, +1	+1, -1

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- No jogo de par-ou-ímpar, não há Equilíbrios de Nash com Estratégias Puras.

		Jogador Ímpar	
		<i>Par</i>	<i>Ímpar</i>
Jogador Par	<i>Par</i>	+1, -1	-1, +1
	<i>Ímpar</i>	-1, +1	+1, -1

- No entanto, há um Equilíbrio de Nash com estratégias mistas: $(\{1/2, 1/2\}; \{1/2, 1/2\})$, isto é, cada jogador joga um número par com probabilidade $1/2$.

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Para encontrar os Equilíbrios de Nash deste jogo, analisemos todos os casos, um a um:

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Para encontrar os Equilíbrios de Nash deste jogo, analisemos todos os casos, um a um:
- ① Suponha que jog. Par jogue par $\implies$ jog. Ímpar jogará ímpar com certeza $\implies$ jog. Par desvia para ímpar $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Para encontrar os Equilíbrios de Nash deste jogo, analisemos todos os casos, um a um:
- ① Suponha que jog. Par jogue par $\implies$ jog. Ímpar jogará ímpar com certeza $\implies$ jog. Par desvia para ímpar $\implies$ não é Nash
- ② Suponha que jog. Par jogue ímpar $\implies$ jog. Ímpar jogará par com certeza $\implies$ jog. Par desvia para par $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Para encontrar os Equilíbrios de Nash deste jogo, analisemos todos os casos, um a um:
- ① Suponha que jog. Par jogue par $\implies$ jog. Ímpar jogará ímpar com certeza $\implies$ jog. Par desvia para ímpar $\implies$ não é Nash
- ② Suponha que jog. Par jogue ímpar $\implies$ jog. Ímpar jogará par com certeza $\implies$ jog. Par desvia para par $\implies$ não é Nash
- ③ Suponha que jog. misture: vamos olhar as misturas caso a caso:

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Para encontrar os Equilíbrios de Nash deste jogo, analisemos todos os casos, um a um:
- ❶ Suponha que jog. Par jogue par $\implies$ jog. Ímpar jogará ímpar com certeza $\implies$ jog. Par desvia para ímpar $\implies$ não é Nash
- ❷ Suponha que jog. Par jogue ímpar $\implies$ jog. Ímpar jogará par com certeza $\implies$ jog. Par desvia para par $\implies$ não é Nash
- ❸ Suponha que jog. misture: vamos olhar as misturas caso a caso:
 - ❶ Suponha $\sigma_{Par}(Par) > \sigma_{Par}(Ímpar) \implies$ jog. Ímpar jogará ímpar com certeza $\implies$ jog. Par desvia para ímpar $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Para encontrar os Equilíbrios de Nash deste jogo, analisemos todos os casos, um a um:
- ① Suponha que jog. Par jogue par $\implies$ jog. Ímpar jogará ímpar com certeza $\implies$ jog. Par desvia para ímpar $\implies$ não é Nash
- ② Suponha que jog. Par jogue ímpar $\implies$ jog. Ímpar jogará par com certeza $\implies$ jog. Par desvia para par $\implies$ não é Nash
- ③ Suponha que jog. misture: vamos olhar as misturas caso a caso:
 - ① Suponha $\sigma_{Par}(Par) > \sigma_{Par}(Ímpar) \implies$ jog. Ímpar jogará ímpar com certeza $\implies$ jog. Par desvia para ímpar $\implies$ não é Nash
 - ② Suponha $\sigma_{Par}(Par) < \sigma_{Par}(Ímpar) \implies$ jog. Ímpar jogará par com certeza $\implies$ jog. Par desvia para par $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Para encontrar os Equilíbrios de Nash deste jogo, analisemos todos os casos, um a um:
- ❶ Suponha que jog. Par jogue par $\implies$ jog. Ímpar jogará ímpar com certeza $\implies$ jog. Par desvia para ímpar $\implies$ não é Nash
- ❷ Suponha que jog. Par jogue ímpar $\implies$ jog. Ímpar jogará par com certeza $\implies$ jog. Par desvia para par $\implies$ não é Nash
- ❸ Suponha que jog. misture: vamos olhar as misturas caso a caso:
 - ❶ Suponha $\sigma_{Par}(Par) > \sigma_{Par}(Ímpar) \implies$ jog. Ímpar jogará ímpar com certeza $\implies$ jog. Par desvia para ímpar $\implies$ não é Nash
 - ❷ Suponha $\sigma_{Par}(Par) < \sigma_{Par}(Ímpar) \implies$ jog. Ímpar jogará par com certeza $\implies$ jog. Par desvia para par $\implies$ não é Nash
 - ❸ Suponha $\sigma_{Par}(Par) = \sigma_{Par}(Ímpar) = 1/2 \implies$ jog. Ímpar estará indiferente. Analisemos caso a caso:

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Suponha $\sigma_{Par}(Par) = \sigma_{Par}(Ímpar) = 1/2 \implies$ jog. Ímpar estará indiferente. Analisemos caso a caso:

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Suponha $\sigma_{Par}(Par) = \sigma_{Par}(Ímpar) = 1/2 \implies$ jog. Ímpar estará indiferente. Analisemos caso a caso:
 - ① jog. Ímpar joga par $\implies$ jog. Par desvia para par $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Suponha $\sigma_{Par}(Par) = \sigma_{Par}(Ímpar) = 1/2 \implies$ jog. Ímpar estará indiferente. Analisemos caso a caso:
 - 1 jog. Ímpar joga par $\implies$ jog. Par desvia para par $\implies$ não é Nash
 - 2 jog. Ímpar joga ímpar $\implies$ jog. Par desvia para ímpar $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Suponha $\sigma_{Par}(Par) = \sigma_{Par}(Ímpar) = 1/2 \implies$ jog. Ímpar estará indiferente. Analisemos caso a caso:
 - 1 jog. Ímpar joga par $\implies$ jog. Par desvia para par $\implies$ não é Nash
 - 2 jog. Ímpar joga ímpar $\implies$ jog. Par desvia para ímpar $\implies$ não é Nash
 - 3 jog. Ímpar mistura: analisemos cada mistura:

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Suponha $\sigma_{Par}(Par) = \sigma_{Par}(Ímpar) = 1/2 \implies$ jog. Ímpar estará indiferente. Analisemos caso a caso:
 - ① jog. Ímpar joga par $\implies$ jog. Par desvia para par $\implies$ não é Nash
 - ② jog. Ímpar joga ímpar $\implies$ jog. Par desvia para ímpar $\implies$ não é Nash
 - ③ jog. Ímpar mistura: analisemos cada mistura:
 - ① Suponha $\sigma_{Ímpar}(Par) > \sigma_{Ímpar}(Ímpar) \implies$ jog. Par desvia para par $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Suponha $\sigma_{Par}(Par) = \sigma_{Par}(Ímpar) = 1/2 \implies$ jog. Ímpar estará indiferente. Analisemos caso a caso:
 - ① jog. Ímpar joga par $\implies$ jog. Par desvia para par $\implies$ não é Nash
 - ② jog. Ímpar joga ímpar $\implies$ jog. Par desvia para ímpar $\implies$ não é Nash
 - ③ jog. Ímpar mistura: analisemos cada mistura:
 - ① Suponha $\sigma_{Ímpar}(Par) > \sigma_{Ímpar}(Ímpar) \implies$ jog. Par desvia para par $\implies$ não é Nash
 - ② Suponha $\sigma_{Ímpar}(Par) < \sigma_{Ímpar}(Ímpar) \implies$ jog. Par desvia para ímpar $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Suponha $\sigma_{Par}(Par) = \sigma_{Par}(Ímpar) = 1/2 \implies$ jog. Ímpar estará indiferente. Analisemos caso a caso:
 - ① jog. Ímpar joga par $\implies$ jog. Par desvia para par $\implies$ não é Nash
 - ② jog. Ímpar joga ímpar $\implies$ jog. Par desvia para ímpar $\implies$ não é Nash
 - ③ jog. Ímpar mistura: analisemos cada mistura:
 - ① Suponha $\sigma_{Ímpar}(Par) > \sigma_{Ímpar}(Ímpar) \implies$ jog. Par desvia para par $\implies$ não é Nash
 - ② Suponha $\sigma_{Ímpar}(Par) < \sigma_{Ímpar}(Ímpar) \implies$ jog. Par desvia para ímpar $\implies$ não é Nash
 - ③ Suponha $\sigma_{Ímpar}(Par) = \sigma_{Ímpar}(Ímpar) \implies$ jog. Par está indiferente, pode jogar $\sigma_{Par} = (1/2, 1/2) \implies$ **Eq. de Nash**

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Outra forma de calcular equilíbrios de Nash é analisando as **Correspondências de Melhor Resposta** (ou Funções de Melhor Resposta, se a imagem da correspondência for um conjunto unitário para toda estratégia jogada pelos adversários).

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Outra forma de calcular equilíbrios de Nash é analisando as **Correspondências de Melhor Resposta** (ou Funções de Melhor Resposta, se a imagem da correspondência for um conjunto unitário para toda estratégia jogada pelos adversários).
- Seja $q = \sigma_{Par}(\text{Ímpar})$, a probabilidade com a qual o jogador Par joga Ímpar;

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Outra forma de calcular equilíbrios de Nash é analisando as **Correspondências de Melhor Resposta** (ou Funções de Melhor Resposta, se a imagem da correspondência for um conjunto unitário para toda estratégia jogada pelos adversários).
- Seja $q = \sigma_{Par}(\acute{I}mpar)$, a probabilidade com a qual o jogador Par joga Ímpar;
- Seja $r = \sigma_{\acute{I}mpar}(\acute{I}mpar)$, a probabilidade com a qual o jogador Ímpar joga Ímpar.

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Outra forma de calcular equilíbrios de Nash é analisando as **Correspondências de Melhor Resposta** (ou Funções de Melhor Resposta, se a imagem da correspondência for um conjunto unitário para toda estratégia jogada pelos adversários).
- Seja $q = \sigma_{Par}(\acute{I}mpar)$, a probabilidade com a qual o jogador Par joga Ímpar;
- Seja $r = \sigma_{\acute{I}mpar}(\acute{I}mpar)$, a probabilidade com a qual o jogador Ímpar joga Ímpar.
- Podemos calcular qual a recompensa esperada de um jogador supondo que seu oponente jogue uma estratégia mista.

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Suponha que o jogador Par jogue $q \in (0, 1)$, isto é, que jogue Ímpar com probabilidade q positiva, mas estritamente menor que 1, e Par com probabilidade $1 - q$.

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Suponha que o jogador Par jogue $q \in (0, 1)$, isto é, que jogue Ímpar com probabilidade q positiva, mas estritamente menor que 1, e Par com probabilidade $1 - q$.
- Para o jogador Ímpar, a recompensa esperada de jogar Ímpar será:

$$\begin{aligned} E \left[U_{\text{Ímpar}} (\text{Ímpar}) \right] &= 1 \times (1 - q) + (-1) \times q \\ &= 1 - 2q \end{aligned}$$

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Suponha que o jogador Par jogue $q \in (0, 1)$, isto é, que jogue Ímpar com probabilidade q positiva, mas estritamente menor que 1, e Par com probabilidade $1 - q$.
- Para o jogador Ímpar, a recompensa esperada de jogar Ímpar será:

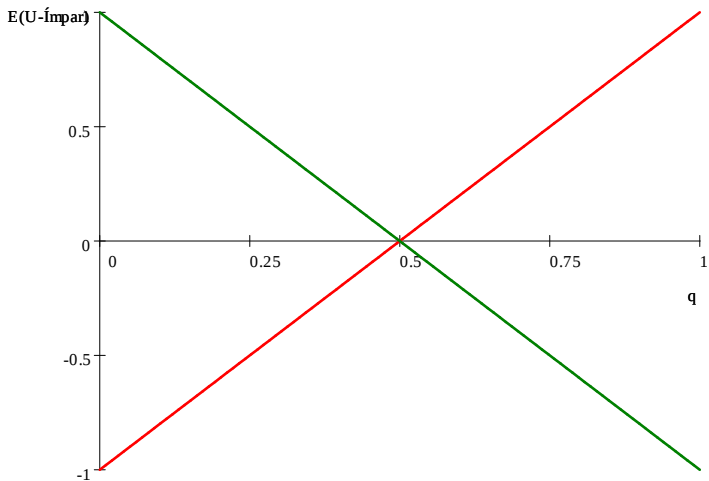
$$\begin{aligned} E \left[U_{\text{Ímpar}} (\text{Ímpar}) \right] &= 1 \times (1 - q) + (-1) \times q \\ &= 1 - 2q \end{aligned}$$

- Para o jogador Ímpar, a recompensa esperada de jogar Par será:

$$\begin{aligned} E \left[U_{\text{Ímpar}} (\text{Par}) \right] &= -1 \times (1 - q) + 1 \times q \\ &= 2q - 1 \end{aligned}$$

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash



Vermelho: $E[U_{\text{Ímpar}}(\text{Par})]$; Verde: $E[U_{\text{Ímpar}}(\text{Ímpar})]$.

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Se $q < 1/2$, o jogador Ímpar prefere jogar Ímpar $\Rightarrow$ Melhor Resposta: Ímpar;

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Se $q < 1/2$, o jogador Ímpar prefere jogar Ímpar $\Rightarrow$ Melhor Resposta: Ímpar;
- Se $q > 1/2$, o jogador Ímpar prefere jogar Par $\Rightarrow$ Melhor Resposta: Par.

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Se $q < 1/2$, o jogador Ímpar prefere jogar Ímpar $\Rightarrow$ Melhor Resposta: Ímpar;
- Se $q > 1/2$, o jogador Ímpar prefere jogar Par $\Rightarrow$ Melhor Resposta: Par.
- Se $q = 1/2$, o jogador Ímpar está indiferente. Melhor Resposta:

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Se $q < 1/2$, o jogador Ímpar prefere jogar Ímpar $\Rightarrow$ Melhor Resposta: Ímpar;
- Se $q > 1/2$, o jogador Ímpar prefere jogar Par $\Rightarrow$ Melhor Resposta: Par.
- Se $q = 1/2$, o jogador Ímpar está indiferente. Melhor Resposta:
 - Jogar Ímpar;

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Se $q < 1/2$, o jogador Ímpar prefere jogar Ímpar $\Rightarrow$ Melhor Resposta: Ímpar;
- Se $q > 1/2$, o jogador Ímpar prefere jogar Par $\Rightarrow$ Melhor Resposta: Par.
- Se $q = 1/2$, o jogador Ímpar está indiferente. Melhor Resposta:
 - Jogar Ímpar;
 - Jogar Par;

Estratégias Mistas

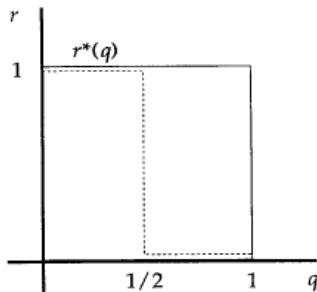
Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Se $q < 1/2$, o jogador Ímpar prefere jogar Ímpar $\Rightarrow$ Melhor Resposta: Ímpar;
- Se $q > 1/2$, o jogador Ímpar prefere jogar Par $\Rightarrow$ Melhor Resposta: Par.
- Se $q = 1/2$, o jogador Ímpar está indiferente. Melhor Resposta:
 - Jogar Ímpar;
 - Jogar Par;
 - Jogar aleatoriamente Par ou Ímpar com qualquer probabilidade.

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Se r for escolhido pelo jogador Ímpar para ser a melhor resposta a q , isto é, $r = r^*(q)$, temos:



Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Vamos calcular agora a Correspondência de Melhor Resposta do Jogador Par.

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Vamos calcular agora a Correspondência de Melhor Resposta do Jogador Par.
- Suponha que o jogador Ímpar jogue $r \in (0, 1)$, isto é, que jogue Ímpar com probabilidade r positiva, mas estritamente menor que 1, e Par com probabilidade $1 - r$.

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Vamos calcular agora a Correspondência de Melhor Resposta do Jogador Par.
- Suponha que o jogador Ímpar jogue $r \in (0, 1)$, isto é, que jogue Ímpar com probabilidade r positiva, mas estritamente menor que 1, e Par com probabilidade $1 - r$.
- Para o jogador Ímpar, a recompensa esperada de jogar Par será:

$$\begin{aligned} E[U_{Par}(Par)] &= 1 \times (1 - r) + (-1) \times r \\ &= 1 - 2r \end{aligned}$$

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Vamos calcular agora a Correspondência de Melhor Resposta do Jogador Par.
- Suponha que o jogador Ímpar jogue $r \in (0, 1)$, isto é, que jogue Ímpar com probabilidade r positiva, mas estritamente menor que 1, e Par com probabilidade $1 - r$.
- Para o jogador Ímpar, a recompensa esperada de jogar Par será:

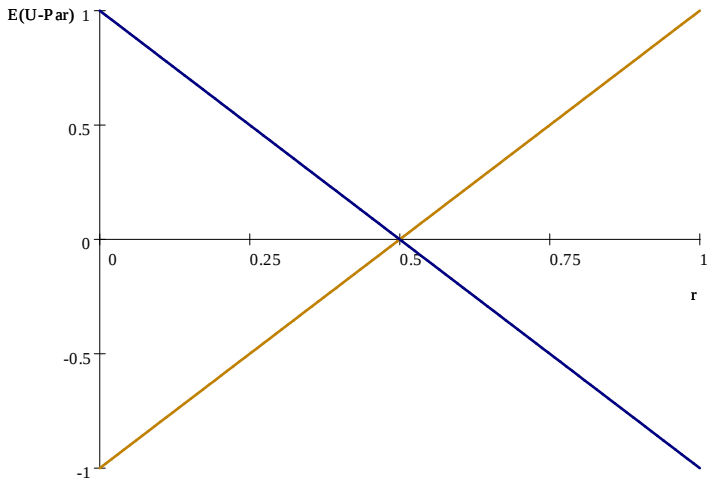
$$\begin{aligned} E[U_{Par}(Par)] &= 1 \times (1 - r) + (-1) \times r \\ &= 1 - 2r \end{aligned}$$

- Para o jogador Ímpar, a recompensa esperada de jogar Ímpar será:

$$\begin{aligned} E[U_{Par}(Ímpar)] &= -1 \times (1 - r) + 1 \times r \\ &= 2r - 1 \end{aligned}$$

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash



Azul: $E[U_{Par}(Par)]$; Laranja: $E[U_{Par}(Impar)]$.

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Se $r < 1/2$, o jogador Par prefere jogar Par $\Rightarrow$ Melhor Resposta: Par;

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Se $r < 1/2$, o jogador Par prefere jogar Par $\Rightarrow$ Melhor Resposta: Par;
- Se $r > 1/2$, o jogador Par prefere jogar Ímpar $\Rightarrow$ Melhor Resposta: Ímpar.

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Se $r < 1/2$, o jogador Par prefere jogar Par $\Rightarrow$ Melhor Resposta: Par;
- Se $r > 1/2$, o jogador Par prefere jogar Ímpar $\Rightarrow$ Melhor Resposta: Ímpar.
- Se $r = 1/2$, o jogador Par está indiferente. Melhor Resposta:

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Se $r < 1/2$, o jogador Par prefere jogar Par $\Rightarrow$ Melhor Resposta: Par;
- Se $r > 1/2$, o jogador Par prefere jogar Ímpar $\Rightarrow$ Melhor Resposta: Ímpar.
- Se $r = 1/2$, o jogador Par está indiferente. Melhor Resposta:
 - Jogar Ímpar;

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Se $r < 1/2$, o jogador Par prefere jogar Par $\Rightarrow$ Melhor Resposta: Par;
- Se $r > 1/2$, o jogador Par prefere jogar Ímpar $\Rightarrow$ Melhor Resposta: Ímpar.
- Se $r = 1/2$, o jogador Par está indiferente. Melhor Resposta:
 - Jogar Ímpar;
 - Jogar Par;

Estratégias Mistas

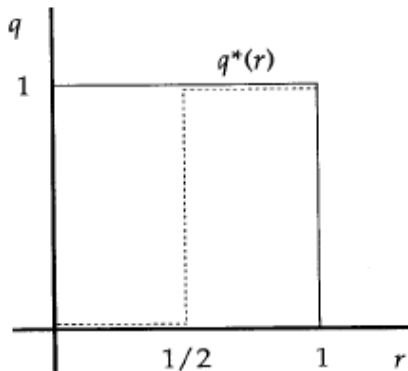
Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Se $r < 1/2$, o jogador Par prefere jogar Par $\Rightarrow$ Melhor Resposta: Par;
- Se $r > 1/2$, o jogador Par prefere jogar Ímpar $\Rightarrow$ Melhor Resposta: Ímpar.
- Se $r = 1/2$, o jogador Par está indiferente. Melhor Resposta:
 - Jogar Ímpar;
 - Jogar Par;
 - Jogar aleatoriamente Par ou Ímpar com qualquer probabilidade.

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

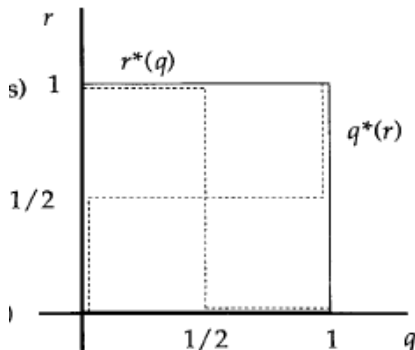
- Graficamente, temos a Melhor Resposta do Jogador Par dada por $q = q^*(r)$:



Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- Podemos obter o equilíbrio de Nash procurando o ponto em que as duas corr. Melhor Resposta se interceptam:



Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- No único Equilíbrio de Nash deste jogo, temos:

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- No único Equilíbrio de Nash deste jogo, temos:
 - O Jogador Par joga Par com probabilidade $1/2$, Ímpar com Probabilidade $1/2$;

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas e Equilíbrio de Nash

- No único Equilíbrio de Nash deste jogo, temos:
 - O Jogador Par joga Par com probabilidade $1/2$, Ímpar com Probabilidade $1/2$;
 - O Jogador Ímpar joga Par com probabilidade $1/2$, Ímpar com Probabilidade $1/2$.

Exercício

Jogo da Guerra Fria

- Suponha um jogo entre EUA e URSS.

Exercício

Jogo da Guerra Fria

- Suponha um jogo entre EUA e URSS.
- Cada superpotência precisa decidir se ameaça seu oponente com armas nucleares ou não.

Exercício

Jogo da Guerra Fria

- Suponha um jogo entre EUA e URSS.
- Cada superpotência precisa decidir se ameaça seu oponente com armas nucleares ou não.
 - Se uma superpotência ameaçar e seu rival recuar, a nação agressiva ganha 10 e a que recua -10;

- Suponha um jogo entre EUA e URSS.
- Cada superpotência precisa decidir se ameaça seu oponente com armas nucleares ou não.
 - Se uma superpotência ameaçar e seu rival recuar, a nação agressiva ganha 10 e a que recua -10;
 - Se ninguém ameaça ninguém, não há ganhos nem perdas a nenhum jogador;

Exercício

Jogo da Guerra Fria

- Suponha um jogo entre EUA e URSS.
- Cada superpotência precisa decidir se ameaça seu oponente com armas nucleares ou não.
 - Se uma superpotência ameaçar e seu rival recuar, a nação agressiva ganha 10 e a que recua -10;
 - Se ninguém ameaça ninguém, não há ganhos nem perdas a nenhum jogador;
 - Se ambos ameaçam um ao outro simultaneamente, temos guerra nuclear e cada nação obtém -100.

Exercício

Jogo da Guerra Fria

- Matriz de Recompensas:

		URSS	
EUA		Ameaça	Não Ameaça
Ameaça		-100, -100	10, -10
Não Ameaça		-10, 10	0, 0

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Analisemos o jogo Pedra-Tesoura-e-Papel:

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Analisemos o jogo Pedra-Tesoura-e-Papel:
 - Cada jogador escolhe um objeto (Pedra, tesoura, ou papel), simultaneamente.

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Analisemos o jogo Pedra-Tesoura-e-Papel:
 - Cada jogador escolhe um objeto (Pedra, tesoura, ou papel), simultaneamente.
 - Os objetos escolhidos são apresentados (simultaneamente), e conta-se o resultado:

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Analisemos o jogo Pedra-Tesoura-e-Papel:
 - Cada jogador escolhe um objeto (Pedra, tesoura, ou papel), simultaneamente.
 - Os objetos escolhidos são apresentados (simultaneamente), e conta-se o resultado:
 - Papel derrota Pedra;

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Analisemos o jogo Pedra-Tesoura-e-Papel:
 - Cada jogador escolhe um objeto (Pedra, tesoura, ou papel), simultaneamente.
 - Os objetos escolhidos são apresentados (simultaneamente), e conta-se o resultado:
 - Papel derrota Pedra;
 - Pedra derrota Tesoura;

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Analisemos o jogo Pedra-Tesoura-e-Papel:
 - Cada jogador escolhe um objeto (Pedra, tesoura, ou papel), simultaneamente.
 - Os objetos escolhidos são apresentados (simultaneamente), e conta-se o resultado:
 - Papel derrota Pedra;
 - Pedra derrota Tesoura;
 - Tesoura derrota Papel.

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Analisemos o jogo Pedra-Tesoura-e-Papel:
 - Cada jogador escolhe um objeto (Pedra, tesoura, ou papel), simultaneamente.
 - Os objetos escolhidos são apresentados (simultaneamente), e conta-se o resultado:
 - Papel derrota Pedra;
 - Pedra derrota Tesoura;
 - Tesoura derrota Papel.
 - Caso os dois jogadores mostrem o mesmo objeto, há empate.

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Analisemos o jogo Pedra-Tesoura-e-Papel:
 - Cada jogador escolhe um objeto (Pedra, tesoura, ou papel), simultaneamente.
 - Os objetos escolhidos são apresentados (simultaneamente), e conta-se o resultado:
 - Papel derrota Pedra;
 - Pedra derrota Tesoura;
 - Tesoura derrota Papel.
 - Caso os dois jogadores mostrem o mesmo objeto, há empate.
- Considere novamente que este jogo tenha soma zero.

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Os payoffs do jogo serão dados por:

Jogador 1	Jogador 2		
	<i>Pedra</i>	<i>Tesoura</i>	<i>Papel</i>
<i>Pedra</i>	0, 0	+1, -1	-1, +1
<i>Tesoura</i>	-1, +1	0, 0	+1, -1
<i>Papel</i>	+1, -1	-1, +1	0, 0

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Os payoffs do jogo serão dados por:

Jogador 1	Jogador 2		
	<i>Pedra</i>	<i>Tesoura</i>	<i>Papel</i>
<i>Pedra</i>	0, 0	+1, -1	-1, +1
<i>Tesoura</i>	-1, +1	0, 0	+1, -1
<i>Papel</i>	+1, -1	-1, +1	0, 0

- Como calcular as correspondências de Melhor Resposta neste caso?

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Primeiro, comparemos estratégias puras aos pares.

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Primeiro, comparemos estratégias puras aos pares.
- Calculemos em que região do simplex cada jogador irá preferir uma estratégia à outra.

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

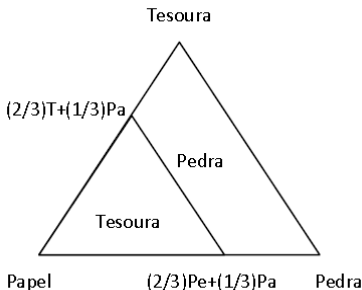
- Primeiro, comparemos estratégias puras aos pares.
- Calculemos em que região do simplex cada jogador irá preferir uma estratégia à outra.
- Sejam σ_{iT} , σ_{iPe} , σ_{iPa} prob. com as quais o jog. i joga Tesoura, Pedra e Papel, respectivamente.

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- O jogador 1 irá preferir Pedra a Tesoura quando:

$$\begin{aligned}u_1(Pedra, \sigma_2) &\geq u_1(Tesoura, \sigma_2) \\ 1 \cdot \sigma_{2T} - 1 \cdot \sigma_{2Pa} &\geq -1 \cdot \sigma_{2Pe} + 1 \cdot \sigma_{2Pa} \\ 2\sigma_{2Pa} &\leq \sigma_{2T} + \sigma_{2Pe}\end{aligned}$$

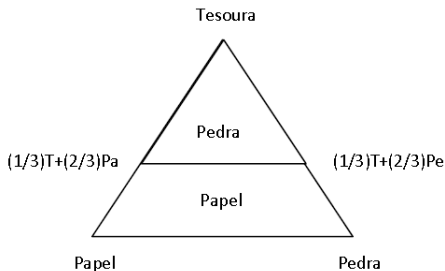


Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- O jogador 1 irá preferir Pedra a Papel quando:

$$\begin{aligned}u_1(Pedra, \sigma_2) &\geq u_1(Papel, \sigma_2) \\ 1 \cdot \sigma_{2T} - 1 \cdot \sigma_{2Pa} &\geq 1 \cdot \sigma_{2Pe} - 1 \cdot \sigma_{2T} \\ 2\sigma_{2T} &\geq \sigma_{2Pa} + \sigma_{2Pe}\end{aligned}$$

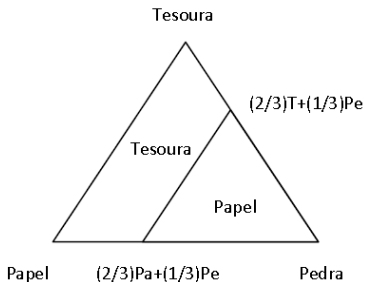


Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- O jogador 1 irá preferir Tesoura a Papel quando:

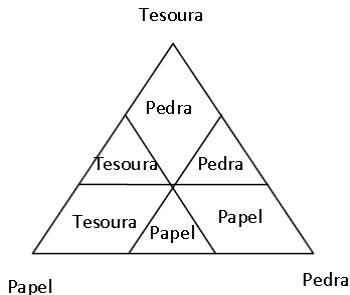
$$\begin{aligned}u_1(Tesoura, \sigma_2) &\geq u_1(Papel, \sigma_2) \\ -1 \cdot \sigma_{2Pe} + 1 \cdot \sigma_{2Pa} &\geq 1 \cdot \sigma_{2Pe} - 1 \cdot \sigma_{2T} \\ 2\sigma_{2Pe} &\leq \sigma_{2Pa} + \sigma_{2T}\end{aligned}$$



Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

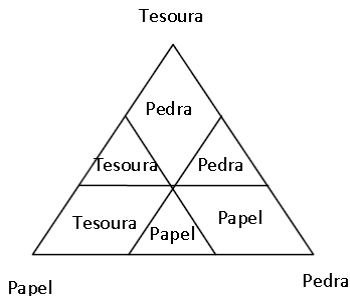
- Podemos então colocar no gráfico a área em que cada estratégia é a Melhor Resposta:



Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Podemos então colocar no gráfico a área em que cada estratégia é a Melhor Resposta:



- Como o jogo é simétrico, o gráfico de melhor resposta para o jogador 2 é idêntico ao do jogador 1.

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Podemos começar a avaliar os casos um a um.

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Podemos começar a avaliar os casos um a um.
- Consideremos agora candidatos a eq. de Nash em que 1 joga estratégias puras:

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Podemos começar a avaliar os casos um a um.
 - Consideremos agora candidatos a eq. de Nash em que 1 joga estratégias puras:
- ❶ Jog. 1 joga Pedra $\implies$ Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Podemos começar a avaliar os casos um a um.
- Consideremos agora candidatos a eq. de Nash em que 1 joga estratégias puras:
 - 1 Jog. 1 joga Pedra $\implies$ Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash
 - 2 Jog. 1 joga Papel $\implies$ Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Podemos começar a avaliar os casos um a um.
- Consideremos agora candidatos a eq. de Nash em que 1 joga estratégias puras:
 - 1 Jog. 1 joga Pedra $\implies$ Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash
 - 2 Jog. 1 joga Papel $\implies$ Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash
 - 3 Jog. 1 joga Tesoura $\implies$ Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Consideremos agora candidatos em que 1 combina duas estratégias puras:

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Consideremos agora candidatos em que 1 combina duas estratégias puras:
- ① Jog. 1 combina T e Pe:

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Consideremos agora candidatos em que 1 combina duas estratégias puras:
- ① Jog. 1 combina T e Pe:
 - ① $\sigma_{1T} \geq 1/3 \implies \text{Jog. 2 joga Pedra} \implies \text{Jog. 1 muda para Papel} \implies$
não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Consideremos agora candidatos em que 1 combina duas estratégias puras:
- ① Jog. 1 combina T e Pe:
 - ① $\sigma_{1T} \geq 1/3 \implies$ Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash
 - ② $\sigma_{1T} \leq 1/3 \implies$ Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Consideremos agora candidatos em que 1 combina duas estratégias puras:
- ① Jog. 1 combina T e Pe:
 - ① $\sigma_{1T} \geq 1/3 \implies$ Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash
 - ② $\sigma_{1T} \leq 1/3 \implies$ Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash
- ② Jog. 1 combina T e Pa:

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Consideremos agora candidatos em que 1 combina duas estratégias puras:
 - ① Jog. 1 combina T e Pe:
 - ① $\sigma_{1T} \geq 1/3 \implies$ Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash
 - ② $\sigma_{1T} \leq 1/3 \implies$ Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash
 - ② Jog. 1 combina T e Pa:
 - ① $\sigma_{1T} \geq 2/3 \implies$ Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Consideremos agora candidatos em que 1 combina duas estratégias puras:

① Jog. 1 combina T e Pe:

- ① $\sigma_{1T} \geq 1/3 \implies$ Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash
- ② $\sigma_{1T} \leq 1/3 \implies$ Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash

② Jog. 1 combina T e Pa:

- ① $\sigma_{1T} \geq 2/3 \implies$ Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash
- ② $\sigma_{1T} \leq 2/3 \implies$ Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Consideremos agora candidatos em que 1 combina duas estratégias puras:
 - 1 Jog. 1 combina T e Pe:
 - 1 $\sigma_{1T} \geq 1/3 \implies$ Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash
 - 2 $\sigma_{1T} \leq 1/3 \implies$ Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash
 - 2 Jog. 1 combina T e Pa:
 - 1 $\sigma_{1T} \geq 2/3 \implies$ Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash
 - 2 $\sigma_{1T} \leq 2/3 \implies$ Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash
 - 3 Jog. 1 combina Pa e Pe:

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Consideremos agora candidatos em que 1 combina duas estratégias puras:

① Jog. 1 combina T e Pe:

- ① $\sigma_{1T} \geq 1/3 \implies$ Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash
- ② $\sigma_{1T} \leq 1/3 \implies$ Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash

② Jog. 1 combina T e Pa:

- ① $\sigma_{1T} \geq 2/3 \implies$ Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash
- ② $\sigma_{1T} \leq 2/3 \implies$ Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash

③ Jog. 1 combina Pa e Pe:

- ① $\sigma_{1Pe} \geq 1/3 \implies$ Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Consideremos agora candidatos em que 1 combina duas estratégias puras:

① Jog. 1 combina T e Pe:

- ① $\sigma_{1T} \geq 1/3 \implies$ Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash
- ② $\sigma_{1T} \leq 1/3 \implies$ Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash

② Jog. 1 combina T e Pa:

- ① $\sigma_{1T} \geq 2/3 \implies$ Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash
- ② $\sigma_{1T} \leq 2/3 \implies$ Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash

③ Jog. 1 combina Pa e Pe:

- ① $\sigma_{1Pe} \geq 1/3 \implies$ Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash
- ② $\sigma_{1Pe} \leq 1/3 \implies$ Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Consideremos agora candidatos em que 1 combina todas as três estratégias puras.

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Consideremos agora candidatos em que 1 combina todas as três estratégias puras.
- Começemos pelas estratégias no interior das áreas designadas por “Tesoura”, “Papel” e “Pedra”:

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Consideremos agora candidatos em que 1 combina todas as três estratégias puras.
- Começemos pelas estratégias no interior das áreas designadas por “Tesoura”, “Papel” e “Pedra”:
- ① Combinações no interior da área “Tesoura” $\implies$ Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Consideremos agora candidatos em que 1 combina todas as três estratégias puras.
- Começemos pelas estratégias no interior das áreas designadas por “Tesoura”, “Papel” e “Pedra”:
 - 1 Combinações no interior da área “Tesoura” $\implies$ Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash
 - 2 Combinações no interior da área “Papel” $\implies$ Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Consideremos agora candidatos em que 1 combina todas as três estratégias puras.
- Começemos pelas estratégias no interior das áreas designadas por “Tesoura”, “Papel” e “Pedra”:
 - 1 Combinações no interior da área “Tesoura” $\implies$ Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash
 - 2 Combinações no interior da área “Papel” $\implies$ Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash
 - 3 Combinações no interior da área “Pedra” $\implies$ Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Agora analisemos as estratégias nas linhas de fronteira entre as áreas:

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Agora analisemos as estratégias nas linhas de fronteira entre as áreas:
- ① Combinações na fronteira entre “Tesoura” e “Papel” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre T e Pa:

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Agora analisemos as estratégias nas linhas de fronteira entre as áreas:
- ① Combinações na fronteira entre “Tesoura” e “Papel” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre T e Pa:
 - ① Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Agora analisemos as estratégias nas linhas de fronteira entre as áreas:
- ① Combinações na fronteira entre “Tesoura” e “Papel” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre T e Pa:
 - ① Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash
 - ② Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Agora analisemos as estratégias nas linhas de fronteira entre as áreas:
- ① Combinações na fronteira entre “Tesoura” e “Papel” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre T e Pa:
 - ① Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash
 - ② Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash
 - ③ Jog. 2 combina T e Pa $\implies$ caso 2 do slide anterior $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Agora analisemos as estratégias nas linhas de fronteira entre as áreas:
- ① Combinações na fronteira entre “Tesoura” e “Papel” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre T e Pa:
 - ① Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash
 - ② Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash
 - ③ Jog. 2 combina T e Pa $\implies$ caso 2 do slide anterior $\implies$ não é Nash
- ② Combinações na fronteira entre “Tesoura” e “Pedra” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre T e Pe:

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Agora analisemos as estratégias nas linhas de fronteira entre as áreas:
- ① Combinações na fronteira entre “Tesoura” e “Papel” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre T e Pa:
 - ① Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash
 - ② Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash
 - ③ Jog. 2 combina T e Pa $\implies$ caso 2 do slide anterior $\implies$ não é Nash
- ② Combinações na fronteira entre “Tesoura” e “Pedra” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre T e Pe:
 - ① Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Agora analisemos as estratégias nas linhas de fronteira entre as áreas:
- ① Combinações na fronteira entre “Tesoura” e “Papel” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre T e Pa:
 - ① Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash
 - ② Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash
 - ③ Jog. 2 combina T e Pa $\implies$ caso 2 do slide anterior $\implies$ não é Nash
- ② Combinações na fronteira entre “Tesoura” e “Pedra” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre T e Pe:
 - ① Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash
 - ② Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Agora analisemos as estratégias nas linhas de fronteira entre as áreas:
- ① Combinações na fronteira entre “Tesoura” e “Papel” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre T e Pa:
 - ① Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash
 - ② Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash
 - ③ Jog. 2 combina T e Pa $\implies$ caso 2 do slide anterior $\implies$ não é Nash
- ② Combinações na fronteira entre “Tesoura” e “Pedra” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre T e Pe:
 - ① Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash
 - ② Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash
 - ③ Jog. 2 combina T e Pe $\implies$ caso 1 do slide anterior $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Agora analisemos as estratégias nas linhas de fronteira entre as áreas:
- ① Combinações na fronteira entre “Tesoura” e “Papel” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre T e Pa:
 - ① Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash
 - ② Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash
 - ③ Jog. 2 combina T e Pa $\implies$ caso 2 do slide anterior $\implies$ não é Nash
- ② Combinações na fronteira entre “Tesoura” e “Pedra” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre T e Pe:
 - ① Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash
 - ② Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash
 - ③ Jog. 2 combina T e Pe $\implies$ caso 1 do slide anterior $\implies$ não é Nash
- ③ Combinações na fronteira entre “Pedra” e “Papel” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre Pe e Pa:

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Agora analisemos as estratégias nas linhas de fronteira entre as áreas:
- ① Combinações na fronteira entre “Tesoura” e “Papel” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre T e Pa:
 - ① Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash
 - ② Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash
 - ③ Jog. 2 combina T e Pa $\implies$ caso 2 do slide anterior $\implies$ não é Nash
- ② Combinações na fronteira entre “Tesoura” e “Pedra” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre T e Pe:
 - ① Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash
 - ② Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash
 - ③ Jog. 2 combina T e Pe $\implies$ caso 1 do slide anterior $\implies$ não é Nash
- ③ Combinações na fronteira entre “Pedra” e “Papel” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre Pe e Pa:
 - ① Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Agora analisemos as estratégias nas linhas de fronteira entre as áreas:
- ① Combinações na fronteira entre “Tesoura” e “Papel” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre T e Pa:
 - ① Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash
 - ② Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash
 - ③ Jog. 2 combina T e Pa $\implies$ caso 2 do slide anterior $\implies$ não é Nash
- ② Combinações na fronteira entre “Tesoura” e “Pedra” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre T e Pe:
 - ① Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash
 - ② Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash
 - ③ Jog. 2 combina T e Pe $\implies$ caso 1 do slide anterior $\implies$ não é Nash
- ③ Combinações na fronteira entre “Pedra” e “Papel” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre Pe e Pa:
 - ① Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash
 - ② Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Agora analisemos as estratégias nas linhas de fronteira entre as áreas:

- ① Combinações na fronteira entre “Tesoura” e “Papel” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre T e Pa:

- ① Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash
- ② Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash
- ③ Jog. 2 combina T e Pa $\implies$ caso 2 do slide anterior $\implies$ não é Nash

- ② Combinações na fronteira entre “Tesoura” e “Pedra” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre T e Pe:

- ① Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash
- ② Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash
- ③ Jog. 2 combina T e Pe $\implies$ caso 1 do slide anterior $\implies$ não é Nash

- ③ Combinações na fronteira entre “Pedra” e “Papel” $\implies$ Jog. 2 indiferente entre Pe e Pa:

- ① Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash
- ② Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash
- ③ Jog. 2 combina Pe e Pa $\implies$ caso 3 do slide anterior $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Analisemos agora o ponto central.

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Analisemos agora o ponto central.
- ① Ponto Central: $\{1/3, 1/3, 1/3\} \implies$ Jog. 2 indiferente entre T, Pe e Pa:

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Analisemos agora o ponto central.
- ① Ponto Central: $\{1/3, 1/3, 1/3\} \implies$ Jog. 2 indiferente entre T, Pe e Pa:
 - ① Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Analisemos agora o ponto central.
- ① Ponto Central: $\{1/3, 1/3, 1/3\} \implies$ Jog. 2 indiferente entre T, Pe e Pa:
 - ① Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash
 - ② Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Analisemos agora o ponto central.
- ① Ponto Central: $\{1/3, 1/3, 1/3\} \implies$ Jog. 2 indiferente entre T, Pe e Pa:
 - ① Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash
 - ② Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash
 - ③ Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Analisemos agora o ponto central.
- ① Ponto Central: $\{1/3, 1/3, 1/3\} \implies$ Jog. 2 indiferente entre T, Pe e Pa:
 - ① Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash
 - ② Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash
 - ③ Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash
 - ④ Jog. 2 combina T e Pe $\implies$ caso 1 do slide 53 $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Analisemos agora o ponto central.
- ① Ponto Central: $\{1/3, 1/3, 1/3\} \implies$ Jog. 2 indiferente entre T, Pe e Pa:
 - ① Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash
 - ② Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash
 - ③ Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash
 - ④ Jog. 2 combina T e Pe $\implies$ caso 1 do slide 53 $\implies$ não é Nash
 - ⑤ Jog. 2 combina T e Pa $\implies$ caso 2 do slide 53 $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Analisemos agora o ponto central.
- ① Ponto Central: $\{1/3, 1/3, 1/3\} \implies$ Jog. 2 indiferente entre T, Pe e Pa:
 - ① Jog. 2 joga Pedra $\implies$ Jog. 1 muda para Papel $\implies$ não é Nash
 - ② Jog. 2 joga Papel $\implies$ Jog. 1 muda para Tesoura $\implies$ não é Nash
 - ③ Jog. 2 joga Tesoura $\implies$ Jog. 1 muda para Pedra $\implies$ não é Nash
 - ④ Jog. 2 combina T e Pe $\implies$ caso 1 do slide 53 $\implies$ não é Nash
 - ⑤ Jog. 2 combina T e Pa $\implies$ caso 2 do slide 53 $\implies$ não é Nash
 - ⑥ Jog. 2 combina Pe e Pa $\implies$ caso 3 do slide 53 $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Resta apenas o caso em que o jog. 1 joga no ponto central e o jog. 2 combina T, Pe e Pa:

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Resta apenas o caso em que o jog. 1 joga no ponto central e o jog. 2 combina T, Pe e Pa:
- ① Jog. 2 combina T, Pe e Pa:

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Resta apenas o caso em que o jog. 1 joga no ponto central e o jog. 2 combina T, Pe e Pa:
- ① Jog. 2 combina T, Pe e Pa:
 - ① Interior das áreas com nome: jog. 1 desvia p/ a estratégia pura correspondente $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Resta apenas o caso em que o jog. 1 joga no ponto central e o jog. 2 combina T, Pe e Pa:
- 1 Jog. 2 combina T, Pe e Pa:
 - 1 Interior das áreas com nome: jog. 1 desvia $p/$ a estratégia pura correspondente $\implies$ não é Nash
 - 2 Linhas entre as áreas: jog. 1 desvia $p/$ 1 das duas estratégias puras das áreas limítrofes ou $p/$ comb. entre as duas $\implies$ não é Nash

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Resta apenas o caso em que o jog. 1 joga no ponto central e o jog. 2 combina T, Pe e Pa:
- ① Jog. 2 combina T, Pe e Pa:
 - ① Interior das áreas com nome: jog. 1 desvia p/ a estratégia pura correspondente $\implies$ não é Nash
 - ② Linhas entre as áreas: jog. 1 desvia p/ 1 das duas estratégias puras das áreas limítrofes ou p/ comb. entre as duas $\implies$ não é Nash
 - ③ Ponto central: Jog. 1 indiferente entre T, Pe e Pa:

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Resta apenas o caso em que o jog. 1 joga no ponto central e o jog. 2 combina T, Pe e Pa:

① Jog. 2 combina T, Pe e Pa:

- ① Interior das áreas com nome: jog. 1 desvia p/ a estratégia pura correspondente $\implies$ não é Nash
- ② Linhas entre as áreas: jog. 1 desvia p/ 1 das duas estratégias puras das áreas limítrofes ou p/ comb. entre as duas $\implies$ não é Nash
- ③ Ponto central: Jog. 1 indiferente entre T, Pe e Pa:
 - ① Jog. 1 pode jogar estratégias puras ou desviar p/ comb. entre as estratégias diferente de $\{1/3, 1/3, 1/3\} \implies$ não é Nash;

Estratégias Mistas

Exemplo com Três Estratégias

- Resta apenas o caso em que o jog. 1 joga no ponto central e o jog. 2 combina T, Pe e Pa:

① Jog. 2 combina T, Pe e Pa:

- ① Interior das áreas com nome: jog. 1 desvia p/ a estratégia pura correspondente $\implies$ não é Nash
- ② Linhas entre as áreas: jog. 1 desvia p/ 1 das duas estratégias puras das áreas limítrofes ou p/ comb. entre as duas $\implies$ não é Nash
- ③ Ponto central: Jog. 1 indiferente entre T, Pe e Pa:
 - ① Jog. 1 pode jogar estratégias puras ou desviar p/ comb. entre as estratégias diferente de $\{1/3, 1/3, 1/3\} \implies$ não é Nash;
 - ② Jog. 1 pode jogar $\{1/3, 1/3, 1/3\} \implies$ **Eq. de Nash**