PROFESSIONAL DEVELOPMENT

Friday, April 5, 2019
Harry S Truman College

La enseñanza de números naturales, enteros, fraccionarios y decimales para adultos.

The teaching of natural, whole, fractional and decimals numbers for adults

José M. Fernández, MSc

Serie estoy-aprendiendo

Matemática Básica

Esta guía de estudio ha sido elaborada para ayudar a los estudiantes de High School Equivalency (HSE) en español a obtener los conocimientos básicos en Matemáticas como complemento del Website *estoy-aprendiendo*. Cualquier error y/o sugerencia puede enviarse a jfernandez-mesa@ccc.edu

José M. Fernández, MSc.

ESTOY-APRENDIENDO es un proyecto de servicio del **Rotary e-Club de Puerto Rico y Las Américas**, desarrollado dentro de la meta de **Rotary International** de empoderar a las comunidades para que apoyen programas de alfabetización y educación básica, reduzcan la disparidad de género en la educación y aumenten el alfabetismo entre los adultos.

En **ESTOY-APRENDIENDO** hemos enlazado los vídeos de YouTube con los diferentes temas, disponiéndolos de manera ordenada para facilitar el estudio de los internautas, siguiendo los lineamientos que se pueden localizar en GED Test 2014, HiSET y TASC. .

Se utilizan también diversos Website gratuitos para que los estudiantes realicen los ejercicios de manera interactiva.

Los más utilizados, pero no los únicos, son:

- PHET Interactive Simulations for Science and Math, University of Colorado Boulder.
- ThatQuiz Math test activities for students and teachers of all grade levels © 2015 y
- Vitutor, aprendizaje en línea de distintas materias.

Estudiante, aprender es un proceso muy largo que va más allá de las aulas de clases, **ESTOY-APRENDIENDO** te brinda herramientas que te permitirán reforzar los conocimientos adquiridos en el aula y/o estudio de todos los temas que son objeto de examen en **GED, HiSET y TASC**. Lo que aprendes en clases, lo reafirmas aquí.

Tienes la ventaja de poder acomodar tu tiempo libre al estudio individual, repitiendo cada tema cuantas veces sea necesario. Tu estudio y comunicación es directa, en la comodidad de tu casa o de una biblioteca pública.

Si aún no estás estudiando, puedes recibir las clases para obtener el **HSE Certificate** gratuitamente en los colegios comunitarios y organizaciones comunitarias de tu ciudad y repasar lo aprendido aquí

Aprovecha el poder de la educación en línea en formas nuevas e innovadoras con las clases con un instructor. Toma el control de tu experiencia en el aula. **ESTOY-APRENDIENDO** te ofrece un trampolín para que alcances el futuro como te lo imaginas.

Jose M Fernández
Adult Educator

Tabla de Contenido

1. NÚMEROS NATURALES

1.1 Concepto de número natural

La imagen muestra el Hueso de Ishango.

Saber cuántos animales tenían en su rebaño o el tiempo transcurrido desde un determinado momento fue una necesidad del *Homo sapiens* desde los albores de la humanidad. Para realizarlo se valió de diversas representaciones que a través de la historia se convirtieron en los signos que hoy conocemos como números. Estos números, llamados **números naturales,** son aquellos que permiten contar los elementos de un conjunto. El uno (1), dos (2), cinco (5), veinte (20) …, son números naturales. Ellos están formados por todos los números enteros positivos.

Como prueba arqueológica tenemos el hueso de Ishango, un utensilio de hueso que data del Paleolítico superior, aproximadamente del año 20 000 a. C. Este objeto es un largo hueso (el peroné de un babuino) con un pedazo punzante de cuarzo incrustado en uno de sus extremos, quizás utilizado para grabar o escribir. En un principio se pensaba que se empleaba como palo de conteo, ya que el hueso tiene una serie de muescas talladas divididas en tres columnas que abarcan toda la longitud de la herramienta, pero algunos científicos han sugerido que las agrupaciones de muescas indican un conocimiento matemático que va más allá del conteo.

ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS NATURALES
Video: Historia del número 1

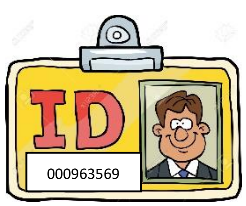
1.2 Propiedades de los números naturales.

El conjunto de los números naturales está formado por:

N= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...}

Con los números naturales podemos:

1. **Contar** los elementos de un conjunto (**<u>número cardinal</u>**). (*La semana tiene 7 días*)
2. Expresar la posición u **orden** que ocupa un elemento en un conjunto (**<u>número ordinal</u>**).
   (*En la competencia Juan ocupó el primer lugar, Pedro el segundo y Luis el tercero*)
3. **Identificar** y **diferenciar** los distintos elementos de un conjunto.
   (Vicente, en Harry S Truman College, tiene como número de estudiante el 000963569.)



CARDINALES

ORDINALES

4. Los números naturales están ordenados, lo que nos permite **comparar** dos números naturales entre sí:

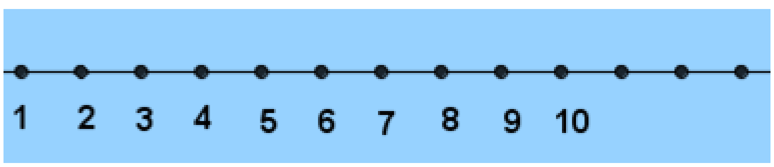
Comparación	Representación
5 es mayor que 3	5 > 3
3 es menor que 5	3 < 5

El signo **>** se lee MAYOR QUE, el signo **<** se lee MENOR QUE.

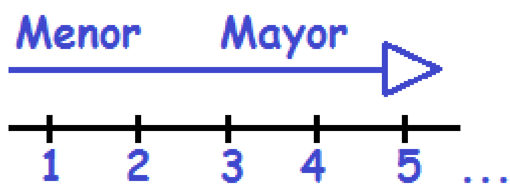
5. Los números naturales son **ilimitados**, si a un número natural le sumamos 1, obtenemos otro número natural, es decir, **los números naturales son infinitos** (∞[1])

1.3 Representación de los números naturales. Orden de los números.

Los números naturales se pueden representar en una recta ordenados de menor a mayor.
Sobre una recta señalamos un punto, que marcamos con el número cero[2] (0).
A la derecha del cero, y con las mismas separaciones, situamos de menor a mayor los siguientes números naturales: 1, 2, 3...



Observe que el número que está a la derecha de un número siempre es mayor que este.
Los números naturales aumentan hacia la derecha.



1.4 Valor posicional de un número natural.

La posición que ocupa cada dígito[3] en un número indica su valor.
Los números naturales forman parte del sistema de numeración decimal, por lo que se ordenan en periodos, clases y órdenes; cada periodo tiene dos clases, y cada clase tiene tres órdenes, como se establece en la siguiente tabla:

---

[1] ∞ es el símbolo matemático que representa el infinito.

[2] El cero (0) es el signo numérico de **valor nulo**, que en notación posicional (*ver acápite 1.4 a continuación*) ocupa los lugares donde no hay una cifra significativa. Si está situado a la derecha de un número entero, su valor se multiplica por 10; colocado a la izquierda, no lo modifica. La **civilización india** es la cuna de la notación posicional, de uso casi universal en el siglo XXI. La palabra «cero» proviene de la traducción de su nombre en sánscrito *shunya* (vacío) al árabe *sifr*, a través del italiano. La voz española «cifra» también tiene su origen en *sifr*.

[3] El término dígito deriva de *digitus*, vocablo latino que puede traducirse como "dedo". En el terreno de las matemáticas, se llama dígito al número que se expresa a través de un solo guarismo (los guarismos son las cifras o signos que sirven para expresar una cantidad). Esto quiere decir que, en la numeración decimal, los números dígitos son diez: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Periodo de los millones						Periodo de las unidades					
Clase de los millares de millón			**Clase de los millones**			**Clase de los millares (mil)**			**Clase de las unidades**		
C	**D**	**U**	**C**	**D**	**U**	**C**	**D**	**U**	**C**	**D**	**U**

Las órdenes son:

- **Unidades** representadas por la U
- **Decenas** representada por la D
- **Centenas** representada por la C

El periodo de gestación de un ser humano medido en segundos es de *veintitrés millones, quinientos ochenta y siete mil segundos*. Si ordenamos esta cantidad en una tabla como la anterior, el resultado sería de 23 millones, 587 millares y 200 unidades. Esto es:

millares de millón			**millones**			**millares**			**unidades**		
C	**D**	**U**	**C**	**D**	**U**	**C**	**D**	**U**	**C**	**D**	**U**
				2	**3**	**5**	**8**	**7**	**2**	**0**	**0**

1.5 Descomposición polinómica de un número natural.

Si consideramos cada dígito, la cifra se descompone así:

20 000 000
3 000 000
500 000
80 000
7 000
200
23 587 200

Podemos expresar esta cantidad en notación desarrollada, la cual se inicia de izquierda a derecha

2 decenas de millón		2 x 10 000 000		20 000 000
3 unidades de millón		3 x 1 000 000		3 000 000
5 centenas de millar		5 x 100 000		500 000
8 decenas de millar	=	8 x 10 000	=	80 000
7 unidades de millar		7 x 1 000		7 000
2 centenas		2 x 100		200
0 decenas		0 x 00		00
0 unidades		0 x 0		0

Observe que la **posición** del dígito 3 es el de las unidades de millón y su **valor** es 3 000 000. Es decir, la **posición** se refiere al **lugar que ocupa** dicho dígito y el **valor** al resultado de **multiplicar dicho dígito por el valor de dicha posición**.

ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS NATURALES
Videos: Leer y escribir números, Valor Posicional, Lectura y escritura de números naturales.
Ejercicios: Valor Posicional Interactivo ThatQuiz

1.6 Suma de números naturales

a + b = c

En una suma (a + b = c), **a** y **b** se denominan **sumandos** y **c** (el resultado) se denomina **suma**.

$$sumando + sumando = \ suma$$

Propiedades de la suma de números naturales

1. <u>Es una operación interna</u>
   El resultado de sumar dos números naturales es otro número natural.
   $$a + b \in N$$
2. <u>Asociativa</u>
   El modo de agrupar los sumandos no varía el resultado.
   (a + b) + c = a + (b + c)
   Ejemplo:
   (2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)
   5 + 5 = 2 + 8
   10 = 10
3. <u>Conmutativa</u>
   El orden de los sumandos no varía la suma.
   a + b = b + a
   Ejemplo:
   2 + 5 = 5 + 2
   7 = 7
4. <u>Elemento neutro</u>
   El 0 es el **elemento neutro de la suma**, porque todo número sumado con él da él mismo número.
   a + 0 = 0 + a
   Ejemplo:
   a + 0 = a
   3 + 0 = 3

ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS NATURALES
Video: Suma y resta de números naturales
Ejercicio: Suma Interactivo ThatQuiz

1.7 Resta de números naturales

a − b = c

En una resta (a - b = c), **a** se denomina **minuendo**, **b** se denomina **sustraendo** y **c** (el resultado) se denomina **diferencia.**

$$minuendo - sustraendo = \ diferencia$$

Propiedades de la resta de números naturales

<u>1. **NO** es una operación interna</u>
El resultado de restar dos números naturales **NO SIEMPRE** es otro número natural.

$$2 - 5 \notin \mathbb{N}$$

2. No es conmutativa

El orden del minuendo y sustraendo varía la diferencia.

$$5 - 2 \neq 2 - 5$$

ACTIVIDADES

www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS NATURALES
Ver el video: Suma y resta de números naturales
Ejercicio de Resta Interactivo ThatQuiz

1.8 Multiplicación de números naturales

$$a \cdot b = c$$

Multiplicar dos números naturales consiste en sumar uno de los factores consigo mismo tantas veces como indica el otro factor.

En una multiplicación (a x b = c), **a** y **b** se denominan **factores** y **c** (el resultado) se denomina **producto**.

Propiedades de la multiplicación de números naturales

1. Es una operación interna
   El resultado de multiplicar dos números naturales es otro número natural.
   $$a \times b \in N$$
2. Es asociativa
   El modo de agrupar los factores no varía el resultado.
   $$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$
   Ejemplo:
   $$(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5)$$
   $$6 \cdot 5 = 2 \cdot 15$$
   $$30 = 30$$
3. Es conmutativa
   El orden de los factores no varía el producto.
   $$a \cdot b = b \cdot a$$
   Ejemplo:
   $$2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$$
   $$10 = 10$$
4. Tiene elemento neutro
   El 1 es el elemento neutro de la multiplicación de números naturales porque todo número multiplicado por él da el mismo número.
   $$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$
   Ejemplo:
   $$3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = 3$$
5. Distributiva
   La multiplicación de un número natural por una suma es igual a la suma de las multiplicaciones de dicho número natural por cada uno de los sumandos.
   $$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
   Ejemplo:
   $$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$$

$2 \cdot 8 = 6 + 10$
$16 = 16$

6. <u>Se puede extraer factor común</u>
   Es el proceso inverso a la propiedad distributiva. Si varios sumandos tienen un factor común, podemos **transformar la suma en producto** extrayendo dicho factor.
   $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$
   Ejemplo:
   $2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 2 \cdot (3 + 5)$
   $6 + 10 = 2 \cdot 8$
   $16 = 16$

ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS NATURALES
Ver el video: Multiplicación de números naturales
Ejercicio de Multiplicación Interactivo ThatQuiz

1.9 División de números naturales

$D \div d = c$

En una división ($D \div d = c$), **D** se denominan **dividendo, d** se denomina **divisor** y **c** (el resultado) se denomina **cociente**.

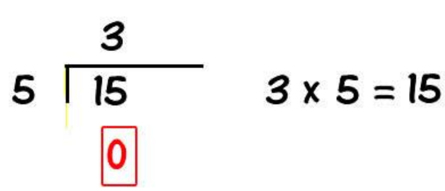
Tipos de divisiones

1. <u>División exacta</u>

   Una división es exacta cuando el resto o residuo es cero.

   $D = d \times c$

   Ejemplo:

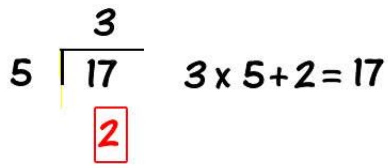


2. <u>División entera</u>

   Una división es entera cuando el resto o residuo es distinto de cero.

   $D = d \cdot c + r$

   Ejemplo:



Propiedades de la división de números naturales

1. <u>No es una operación interna</u>
   El resultado de dividir dos números naturales no siempre es otro número natural.

$$a \div b \ \notin N$$

Ejemplo:

$$2{:}\ 6$$

2. <u>No es conmutativa</u>
   El modo de agrupar los factores varía el resultado.

$$a \div b \ \neq b \ \div a$$

Ejemplo:

$$6 \div 2 \ \neq 2 \ \div 6$$

3. <u>El cero dividido **entre cualquier número** da cero</u>

$$0 \div a = 0$$

Ejemplo:

$$0 \div 6 = 0$$

4. <u>La división por 0 no está definida. **No se puede dividir por 0**</u>

$$a \div 0 \quad NO\ DEFINIDO$$

ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS NATURALES
Ver el video: División de números naturales
Ejercicio de División Interactivo ThatQuiz

1.10 números primos

Definición

Un número primo es un número natural mayor que el 1 y que **tiene exactamente dos divisores**. Es decir, un número primo sólo tiene como divisor a él mismo y a la unidad. El número 1 sólo tiene un divisor, por eso no se considera un número primo

Para averiguar si un número es primo, se divide ordenadamente por todos los números primos menores que él.

En la tabla puede observar que el 2, 3, 5, 7, 11 y 13 (marcados con la **P** de primo) solamente tienen dos divisores: el **1** y el **propio número**

	P	**P**		**P**		**P**				**P**		**P**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
	1	**1**	2	**1**	3	**1**	4	3	5	**1**	6	**1**
			1		2		2	1	2		3	
					1		1		1		2	
											1	

Listado de los números primos hasta 200

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199

Números compuestos

Un número <u>*compuesto*</u> es el que posee más de dos divisores. Es decir, aquel que se puede dividir por sí mismo, por la unidad y por otros números. En la tabla de arriba observen que el 4, 6, 8, 9, 10 y 12 tienen más de dos divisores.

Los números compuestos se pueden expresar como productos de números primos. A dicha expresión se le llama descomposición de un número en factores primos.

Ejemplo:

4=2x2 *(también puede expresarse 2^2, es decir el dos se multiplica por sí mismo 2 veces)*

6=2x3

8=2x2x2 *(también puede expresarse 2^3, es decir el dos se multiplica por sí mismo 3 veces)*

9=3x3 *(también puede expresarse 3^2, es decir el dos se multiplica por sí mismo 3 veces)*

10=2x5

12=2x2x3 *(también puede expresarse 2^2x3, es decir el dos por sí mismo 2 veces por el 3)*

…

70=2x5x7

Los números se dividen en **pares e impares** (también llamados nones).

Números pares

Cualquier número que se pueda dividir exactamente entre 2. La última cifra de un número par será 0, 2, 4, 6 u 8

Ejemplo:

2, 16, 250, 366, 44, …

Números impares

Cualquier número que no es par. La última cifra será 1, 3, 5, 7 o 9.

Ejemplo:

1, 11, 25, 47, 99, 133, 849, …

ANALIZA LO SIGUIENTE
Todos los números pares son compuestos EXCEPTO el 2
Todos los números que terminan en 0 o en 5 son compuestos EXCEPTO el 5

ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS NATURALES
Ver el video: Números Primos
Ejercicio de Primos y compuestos ThatQuiz

1.11 Factorización de números compuestos

Existen algunos números naturales que tienen ciertas características particulares. A muchos de ellos es posible identificarlos como múltiplos de otros números iguales o más pequeños. De aquí que sea sencillo diferenciar a los que son divisibles entre los números más usuales, y con ello determinar los criterios de divisibilidad.

Número par: son los números terminados en 0, 2, 4, 6 y 8 (excepto el cero)

Número impar: son los números terminados en 1, 3, 5, 7 y 9.

Criterio de divisibilidad por 2

Un número natural es divisible entre 2 si su última cifra es 0, 2, 4, 6 u 8, son llamados ***números pares***.

Ejemplos:

500 es divisible entre 2 por terminar en 0. Es un número par.
844 es divisible entre 2 porque termina en 4, es un número par.
977 **NO ES** divisible entre 2 por terminar en cifra impar.

Criterio de divisibilidad por 3

Un número natural es divisible entre 3 si la suma de sus cifras (dígitos) es divisible entre 3.

Ejemplos:

En el número 4 452 sus cifras suman 4 + 4 + 5 + 2 = 15
15 es divisible entre 3, (1+5=6)
Entonces 4 452 es divisible por 3, tiene tercera.

En el número 27 225 sus cifras suman 2 + 7 + 2 + 2 + 5 = 18
18 es divisible entre 3, (1+8=9)
Entonces 27 225 es divisible por 3, tiene tercera.

En el número 27 226 sus cifras suman 2 + 7 + 2 + 2 + 6 = 19
19 **NO ES** divisible entre 3, (1+9=10)
Entonces 27 225 NO es divisible por 3, NO tiene tercera.

Criterio de divisibilidad por 5

Un número natural es divisible entre 5 si su última cifra es 0 o 5.
Ejemplos:

40 320 es divisible por 5 porque termina en 0.
1 535 es divisible por 5 porque termina en 5.
72 **NO ES** divisible por 5 porque no termina ni en 0 ni en 5.
593 **NO ES** divisible entre 5 porque no termina ni en 0 ni en 5.

Criterio de divisibilidad por 7

Para determinar si un número es divisible entre 7, se sigue este procedimiento:

Se observa qué número se forma al quitar la última cifra del número.
Después, qué número se obtiene al duplicar la cifra que se quitó.
Se determina cuál es la diferencia entre los dos números así formados; si la diferencia es divisible entre 7, entonces el número original es divisible entre 7.

Ejemplo: **224** Se separa la última cifra, 4 en este caso) 22 4
Se obtiene el duplo de la cifra) 4 x 2 = 8
Se obtiene la diferencia entre las cifras obtenidas 22 – 8 = 14
14 es múltiplo de 7.
Por lo tanto, **224** es múltiplo de 7

Ejemplo: **5068** Se separa la última cifra, 4 en este caso) 506 8
Se obtiene el duplo de la cifra) 8 x 2 = 16
Se obtiene la diferencia entre las cifras obtenidas 506 – 16 = 490

Si no está seguro si el número obtenido (490) es divisible por 7, repita el proceso
490 49 0
0 x 2 = 0
49 – 0 = 49
49 es múltiplo de 7.
Por lo tanto, **5068** es múltiplo de 7

Criterio de divisibilidad por 9

Un número es divisible entre 9 si la suma de sus cifras es divisible entre 9.
Ejemplos:

171 es divisible por 9 porque 1 + 7 + 1 = 9
846 es divisible por 9 porque 8 + 4 + 6 = 18, que es múltiplo de 9.
118 **NO ES** divisible entre 9, porque 1 + 1 + 8 = 10 (no cumple el criterio)
837 es divisible por 9 porque la suma de sus cifras: 8 + 3 + 7 = 18, que es divisible entre 9.
45 853 es divisible por 9, porque 4 + 7 + 8 + 5 + 3 = 27, es divisible entre 9.

FACTORIZACIÓN DE NÚMEROS COMPUESTOS

Para factorizar un número o *descomponerlo en factores* efectuamos sucesivas divisiones entre sus divisores primos hasta obtener un 1 como cociente.

Para realizar las divisiones utilizaremos una barra vertical, a la derecha escribimos los divisores primos y a la izquierda los cocientes.

Ejemplo: Factorizar 432

$$\begin{array}{r|l} 432 & 2 \\ 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Solución: $432 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^3$

El 2 multiplicado por sí mismo 4 veces por el 3 multiplicado por sí mismo 3 veces

Factorizar 2520

$$\begin{array}{r|l} 2520 & 2 \\ 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Solución: $2\,520 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

El 2 multiplicado por sí mismo 3 veces por el 3 multiplicado por sí mismo 2 veces, por el 5 y por 7

ACTIVIDADES

www.estoy-aprendiendo.com

MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS NATURALES

Ver el video: Descomponer en factores primos

Ejercicio de Descomponer en factores ThatQuiz

1.12 Múltiplos de un número

Un número **a** es múltiplo de otro **b** cuando es el resultado de multiplicar este último por otro número **c**.

$$a = b \cdot c$$

Dado un número natural obtenemos un múltiplo de él al multiplicarlo por otro número natural.

Ejemplo:

$18 = 2 \cdot 9$ 18 es múltiplo de 2, ya que resulta de multiplicar 2 por 9.

Propiedades de los múltiplos de un número

1. Todo número "a", distinto de 0, es múltiplo de sí mismo y de la unidad.
2. El cero es múltiplo de todos los números.
3. Todo número, distinto de cero, tiene infinitos múltiplos.
4. Si "a" es múltiplo de "b", al dividir "a" entre "b" la división es exacta.
5. La suma de varios múltiplos de un número es otro múltiplo de dicho número.
6. La diferencia de dos múltiplos de un número es otro múltiplo de dicho número.
7. Si un número es múltiplo de otro, y éste lo es de un tercero, el primero es múltiplo del tercero.
8. Si un número es múltiplo de otro, todos los múltiplos del primero lo son también del segundo.

1.13 Divisores de un número

Un número **b** es un *divisor* de otro **a** cuando lo divide exactamente.

A los divisores también se les llama *factore*s.

Ejemplo:

$12 : 4 = 3$ 4 es divisor de 12
$4 \cdot 3 = 12$ 12 es múltiplo de 4

Propiedades de los divisores de un número

1. Todo número "a", **distinto de 0**, es divisor de sí mismo.
2. El 1 es divisor de todos los números.
3. Todo divisor de un número **distinto de cero** es menor o igual a él, por tanto, el número de divisores es finito.
4. Si un número es divisor de otros dos, también lo es de su suma y de su diferencia.
5. Si un número es divisor de otro, también lo es de cualquier múltiplo de éste.
6. Si un número es divisor de otro, y éste lo es de un tercero, el primero lo es del tercero.

Número de divisores de un número

Se obtiene **sumando la unidad a los exponentes** (del número descompuesto en factores) y multiplicando los resultados obtenidos.

Ejemplo:

Consideremos el número 2,520:
Su descomposición en factores es

$$2{,}520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

El número de divisores de 2,520 es:

$$(3 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = (4)\,(3)\,(2)\,(2) = 48$$

Formación de la tabla de divisores

1. Se escribe una primera fila formada por la unidad y todas las potencias del primer factor y se traza una línea horizontal.
   En este caso el 2

1	2	4	8

2. Se escribe una segunda fila, con los productos del segundo factor por la fila anterior. Si el segundo factor se ha elevado a exponentes superiores a la unidad, por cada unidad del exponente se escribe otra fila. Se traza otra línea horizontal.
   En este caso el 3

1	2	4	8
3	6	12	24
9	18	36	72

3. Se escriben ahora otras filas con los productos del tercer factor (con las potencias correspondientes) por todos los números obtenidos hasta el momento.
   En este caso el 5.

1	2	4	8
3	6	12	24
9	18	36	72
5	10	20	40
15	30	60	120
45	90	180	360

4. Se continúa de igual modo con otros posibles factores.
   En este caso el 7.

1	2	4	8
3	6	12	24
9	18	36	72
5	10	20	40
15	30	60	120
45	90	180	360
7	14	28	56
21	42	84	168
63	126	252	504
35	70	140	280
105	210	420	840
315	630	1260	2520

El último divisor obtenido debe coincidir con el número (2 520)

<u>Propiedad especial</u>
El producto de los extremos **SIEMPRE** da el número factorizado.

1 x 2520 = 2520
2 x 1260 = 2520
4 x 630 = 2520
9 x 280 = 2520
45 x 56 = 2520

1	2	4	8
3	6	12	24
9	18	36	72
5	10	20	40
15	30	60	120
45	90	180	360
7	14	28	56
21	42	84	168
63	126	252	504
35	70	140	280
105	210	420	840
315	630	1260	2520

Esto es de suma importancia en la solución de ecuaciones de segundo grado en álgebra para resolver las ecuaciones del tipo $x^2 + px + q = 0$

1.14 Mínimo común múltiplo

El mínimo común múltiplo de varios números (mcm) es el menor de todos los múltiplos comunes, excluido el cero.

Cálculo del mínimo común múltiplo

Método 1

1. Se descomponen los números en factores primos.
2. Se toman los **factores comunes y no comunes** con mayor exponente.

Ejemplos:
Hallar el mcm de 72, 108 y 60:

$72 = \underline{2^3} \cdot 3^2$
$108 = 2^2 \cdot \underline{3^3}$
$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot \underline{5}$

Solución: Se toma 2^3 de 72, 3^3 de 108 y 5 de 60

mcm (72, 108, 60) = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 = 1080$

1 080 es el menor múltiplo común a 72, 108 y 60, lo que significa que 1 080 es el menor número que puede ser dividido por 72, 108 y 60.

Método 2

1. Se descomponen los números en factores primos a la vez.
2. Se multiplican todos los factores encontrados.

72	108	60	2	
36	54	30	2	
18	27	15	2	Se repiten los números que no contienen ese factor (en este caso 27 y 15)
9	27	15	3	
3	9	5	3	Se repiten los números que no contienen ese factor (en este caso 5)
1	3	5	3	Se repiten los números que no contienen ese factor (en este caso 5)
	1	5	5	
		1		

El resultado es el mismo, pero más rápido: mcm(72, 108, 60) = $2^3 x 3^3 x 5 = 1080$

Propiedades del mínimo común múltiplo

1. Dados varios números todo múltiplo común a ellos es múltiplo del m.c.m de dichos números.
2. Los múltiplos comunes a varios números son también múltiplos del m.c.m de dichos números.
   Ejemplo:
   mcm (16, 8) = 16
   Algunos de los múltiplos comunes de 16 y 8 son, 80. 160, 240, 320 que también son múltiplos de 16
3. Cualquier múltiplo del *mcm* de varios números también lo es de dichos números.
   Ejemplo:
   mcm (16, 8) = 16
   Algunos de los múltiplos de 80 son 160, 240, 320 que también son múltiplos de 16 y de 8

4. El m.c.m. de dos números primos entre sí es su producto.
   Ejemplo:
   mcm (2,5) = 2 · 5 = 10

5. Si un número es un múltiplo de otro, entonces es el mcm de ambos.
   Ejemplo:
   El número 36 es múltiplo de 12.
   mcm (12, 36) = 36

6. Dados varios números, si se multiplican o dividen por otro número entonces su mcm también queda dividido o multiplicado por el mismo número.
   Ejemplo:
   mcm (32, 84) = 672
   32 · 4 = 128
   84 · 4 = 336
   mcm (128, 336) = 2688 = 672 · 4

7. *Relación entre el mcd (máximo común divisor) y mcm (mínimo común múltiplo)*
   mcd (a, b) · mcm (a, b) = a · b

Ejemplo:

mcd (12, 16) · mcm (12, 16) = 12 x 16
mcd (12, 16) = 4
mcm (12, 16) = 48
48 · 4 = 12 ·16
192 = 192

PALABRAS CLAVES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Mínimo, menor, cuando vuelven a coincidir, repiten, encuentran.

ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS NATURALES
Ver el video: Mínimo Común Múltiplo
Ejercicio de Mínimo Común Múltiplo ThatQuiz

1.15 Máximo común divisor

El ***máximo común divisor*** (mcd) de dos o más números **es el mayor número que divide a todos exactamente.**

Cálculo del máximo común divisor

Método 1

1. Se descomponen los números en factores primos.
2. **Se toman los factores comunes con menor exponente**.
3. Se multiplican dichos factores y el resultado obtenido es el mcd.

Ejemplo de cálculo de máximo común divisor

Hallar el MCD de: 72, 108 y 60:

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Solución:

$72 = 2^3 \cdot 3^2$ $\quad 108 = \underline{2^2} \cdot 3^3$ $\quad 60 = 2^2 \cdot \underline{3} \cdot 5$

[El 2 y el 3 se repiten en los tres. Se tomó el menor exponente]

m. c. d. (72, 108, 60) = $2^2 \cdot 3 = 12$

12 es el mayor número que divide a 72, 108 y 60.

Método 2

1. Se descomponen los números en factores primos.
2. **Se toman los factores comunes a los números**.
3. Se multiplican dichos factores y el resultado obtenido es el mcd

72	108	60	2*	
36	54	30	2*	
18	27	15	2	Se repiten los números que no contienen ese factor (en este caso 27 y 15)
9	27	15	3*	
3	9	5	3	Se repiten los números que no contienen ese factor (en este caso 5)
1	3	5	3	Se repiten los números que no contienen ese factor (en este caso 5)
	1	5	5	
		1		

Hemos marcado con un asterisco los factores que han sido comunes a los tres números.
Al multiplicarlos obtenemos el máximo común divisor:

$$mcd(72,108, 60)= 2^2x3 = 4x3 = 12$$

Propiedades del máximo común divisor

1. Los divisores comunes de varios números coinciden con los divisores del máximo común divisor.
   Ejemplo:
   Calcular los divisores comunes de 54 y 90.
   mcd (54, 90) = 18
   Los divisores comunes de 54 y 90 son los divisores de 18, por tanto serían 1, 2, 3, 6, 9, 18.

2. Dados varios números, si se multiplican o dividen por otro número entonces su m.c.d también queda multiplicado o dividido por el mismo número.
   Ejemplo:
   mcd (54, 90) = 18
   Si multiplicamos los dos números por 3 queda:
   54 · 3 = 162
   90 · 3 = 270
   mcd (162, 270) = 54 = 18 · 3

3. Esta propiedad es consecuencia de la anterior: Dados varios números, si se dividen por su m.c.d los cocientes resultantes son primos entre sí (su m.c.d es 1).
   Ejemplo:
   mcd (54, 90) = 18
   54 : 18 = 3
   90 : 18 = 5
   mcd (3, 5) = 1

4. Si un número es divisor de otro, entonces este es el m. c. d de los dos.
   Ejemplo:
   El número 12 es divisor de 36.
   mcd (12, 36) = 12

PALABRAS CLAVES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Máximo, mayor, dividir, el más grande, objetos iguales, más amplio, más caben, etc.

ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS NATURALES
Ver el video: Máximo Común Divisor
Ejercicio de Máximo Común Divisor ThatQuiz

1.16 Redondeo de números naturales. Reglas

En algunas situaciones, no necesitas el resultado exacto. En estos casos, es posible redondear el número a un valor posicional específico.

Por ejemplo, si compraste un objeto por $56.61, generalmente dices que te costó $56 e incluso $60, pues te resulta más fácil recordar el número sin los centavos. El redondeo se utiliza para realizar cálculos estimados.

Redondear un número quiere decir reducir el número de cifras significativas[4] manteniendo un valor similar. Aunque el resultado es menos exacto, resulta muy fácil de utilizar.

Reglas para redondear números naturales

1. Identifica el dígito con el valor posicional que deseas redondear. (Puedes subrayar o encerrar en un círculo el dígito para destacarlo de los otros)

   Ejemplo 1: Redondear 1,381 a la decena más cercana: 1,3$\underline{8}$1
   Ejemplo 2: Redondear 1,386 a la decena más cercana: 1,3$\underline{8}$1

2. Observa la cifra que está a la derecha del dígito que vas a redondear

   a. Si es 5 o mayor que 5, súmale 1 al dígito.
   b. Si es 4 o menor que 4, dejas el mismo dígito
   Ejemplo 1: 1,381 es 1, al estar en el conjunto {0,1,2,3,4}, dejo el mismo dígito: 8
   Ejemplo 2: 1,386 es 6, al estar en el conjunto {5,6,7,8,9}, sumo 1 al dígito: 8+1=9

[4] Son significativos todos los dígitos distintos de cero (8723 tiene cuatro cifras significativas); los ceros situados entre dos cifras significativas son significativos (105 tiene tres cifras significativas); los ceros a la izquierda de la primera cifra significativa no lo son. (0,005 tiene una cifra significativa.

3. Sustituye con ceros los valores posicionales a la derecha del dígito que vas a redondear.

Ejemplo 1: 1,381 → 1,380
Ejemplo 2: 1,386 → 1,390

ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS NATURALES
Ver el video: Redondeo de números naturales
Ejercicio de Redondeo ThatQuiz
Ejercicios de Redondeo (Documento pdf)

2. NÚMEROS ENTEROS

2.1 Concepto de números enteros

Los **números naturales** no fueron suficientes para que los matemáticos representaran algunas cantidades, ni para distinguir ciertas situaciones de otras. Algunas operaciones, como la resta y la división, no son operaciones internas en el conjunto de los números naturales (N), ya que el resultado de restar o dividir dos números naturales no siempre da un número natural. Con los números naturales no era posible realizar diferencias cuando el minuendo era menor que el que el sustraendo[5], pero en la vida real nos encontramos con operaciones de este tipo en las cuales a un número menor hay que restarle un número mayor.

El conjunto de los **números enteros**, que denotaremos por **Z** (*inicial de zahlen, que en alemán significa número*), surge al añadir al conjunto de los números naturales el 0 y todos los números que aparecen al cambiar el signo a los naturales, es decir, sus opuestos.

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\ldots\}$$

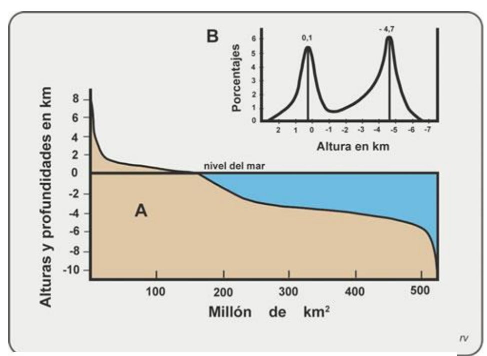
Los enteros negativos se leen anteponiendo la palabra “menos” o “negativo”, por ejemplo -10 se lee menos diez o negativo diez, -15 se lee menos quince o negativo quince, etc. Los números negativos **son menores que cero y que todos los números positivos**.

Para denotar la diferencia entre números positivos y números negativos, se escribe un signo delante de ellos: “más” (+) delante de los positivos (+1, +5…) y “menos” (-) delante de los negativos (-1, -5…). **Cuando a un número NO le antecede un signo, se asume que es positivo** (5, 6, 90… son números positivos)

Ejemplo del uso de los números enteros:

.

La necesidad de representar las temperaturas bajo cero



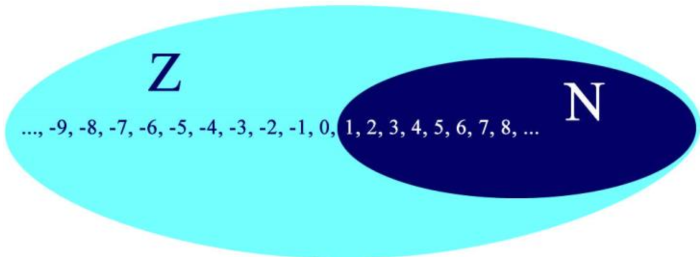
Representar las profundidades con respecto al nivel del mar

Los números enteros están compuestos por los números naturales (enteros positivos), el cero y los números negativos (enteros negativos).

Números enteros:
- Enteros positivos o números naturales.
- Enteros negativos.
- Cero

[5] Ver en esta serie estoy-aprendiendo Matemática Básica 1 - Números Naturales, Acápite 1.7 Resta de números naturales, página 7

Teniendo en cuenta que los enteros contienen los enteros positivos, se considera a los números naturales son un subconjunto de los enteros.



Actividades: **www.estoy-aprendiendo.com** MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS ENTEROS Ver el video: ¿Qué son los números enteros?

2.2 Valor absoluto de un número entero

El valor absoluto de un número entero ***es el número natural que resulta al no tener en cuenta su signo***.

El valor absoluto lo escribiremos entre barras verticales.
Ejemplo:

$|-5| = 5$
$|+5| = 5$ (se ha puesto el signo + por razones didácticas)

Ejemplo de operaciones con valores absolutos.

$|-5|+5 = 5 + 5 =10$
$|5|+5 = 5 + 5 =10$

Observe que en ambos casos la suma es 10, debido el valor absoluto de -5 y el de +5 es el mismo: 5.

ACTIVIDADES **www.estoy-aprendiendo.com** MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS ENTEROS Ver el video: Valor absoluto de un número entero Ejercicio: Valor Absoluto Números enteros

Números opuestos

El opuesto de un número es el número que, al ser sumado con él, da como resultado el número 0. El opuesto de un número tiene el mismo valor absoluto, **pero signo contrario**.

ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS ENTEROS
Ver video: Números opuestos

Números recíprocos o inversos

Se denominan números recíprocos, aquellos que se relacionan entre sí cumpliendo que el producto entre ellos es igual a 1. Para obtener el *recíproco* de un número (su *inverso*), se divide 1 por el número.

Ejemplo: el recíproco de 9 es 1/9, el reciproco de 1/9 es 9

Propiedades

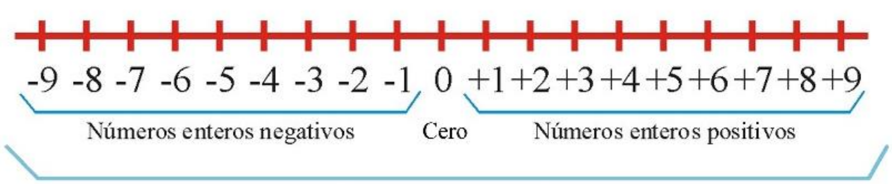
- Todo número tiene un recíproco **excepto el 0**
- $\frac{1}{0}$ **no definido**.
- Si multiplicamos un número por su recíproco se obtiene 1.

Ejemplo: El recíproco de 6 es $\frac{1}{6}$, $6 \times \frac{1}{6} = 1$

ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS ENTEROS
Ver video: Números recíprocos

2.3 Números enteros en la recta numérica

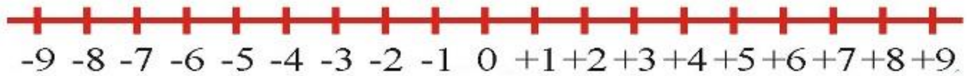
1. En una recta horizontal, se toma un punto cualquiera que se señala como cero.
2. A su derecha y a distancias iguales se van señalando los números positivos: 1, 2, 3,...
3. A la izquierda del cero y a distancias iguales que las anteriores, se van señalando los números negativos: −1, −2, −3,...



RECTA NUMÉRICA DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Orden en los números enteros

Los números enteros están ordenados. De tres números representados gráficamente, es mayor el que está situado a la derecha, y menor el que está situado a la izquierda.



+1 es mayor que 0	+5 es mayor que +2
-1 es mayor que -9	+1 es mayor que -7

Para representar estas comparaciones se utilizan los signos "mayor que" **(>)**, "menor que" **(<)**.
Ejemplos:

+1 es mayor que 0	$1 > 0$
+5 es mayor que +2	$5 > 2$
-1 es mayor que -9	$-1 > -9$
+1 es mayor que -7	$1 > -7$
6 es menor que 7	$6 < 7$
-6 es menor que -2	$-6 < -2$

Observe que la "*punta*" siempre señala al menor y que la "*parte ancha"* siempre señala al mayor.

Criterios de ordenamiento de los números enteros

1. Todo número negativo es menor que cero. $-7 < 0$
2. Todo número positivo es mayor que cero. $7 > 0$
3. De dos enteros negativos es mayor el que tiene menor valor absoluto.
   $-7 > -10$
   $|-7| < |-10|$
4. De los enteros positivos, es mayor el que tiene mayor valor absoluto.
   $10 > 7$
   $|10| > |7|$

ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS ENTEROS
Ver los videos: Números enteros en la recta numérica
Ordenamiento de los números enteros
Ejercicio: Números enteros en la recta numérica

OPERACIONES CON LOS NÚMEROS ENTEROS

2.5 Suma de los números enteros

Regla de los signos (suma/resta)

- Si los sumandos son del **mismo signo**, se suman los valores absolutos y al resultado se le pone el signo común.
  Ejemplo:
  3 + 5 = 8 (ambos son positivos (+), el signo resultante es +
  (−3) + (−5) = −8 (ambos son negativos (-), el signo resultante es –

- Si los sumandos son de **diferente signo,** se restan los valores absolutos (al mayor le restamos el menor) y al resultado se le pone el signo del número de mayor valor absoluto.
  Ejemplo:
  −3 + 5 = 2 |-3|=3; |5|=5 5>3; 5 es positivo, el signo resultante es +
  3 + (−5) = −2 |3|=3; |-5|=5 5>3; 5 es negativo, el signo resultante es -

Propiedades de la suma de números enteros

1. *Interna*
   El resultado de sumar dos números enteros es otro número entero.
2. *Asociativa*
   El modo de agrupar los sumandos no varía el resultado.
   (a + b) + c = a + (b + c)
   Ejemplo:
   (2 + 3) + (−5) = 2 + [3 + (−5)]
   5 − 5 = 2 + (−2)
   0 = 0

3. *Conmutativa*
   El orden de los sumandos no varía la suma.
   a + b = b + a
   Ejemplo:
   2 + (−5) = (−5) + 2
   −3 = −3

4. *Elemento neutro*
   El 0 es el elemento neutro de la suma porque todo número sumado con él da el mismo número.
   a + 0 = a
   Ejemplo:
   (−5) + 0 = −5

5. Elemento opuesto
   Dos números son opuestos si al sumarlos obtenemos como resultado cero.
   a + (−a) = 0
   Ejemplo:
   5 + (−5) = 0

6. *El opuesto del opuesto de un número es igual al mismo número*.
   Ejemplo: Sea 5 el número, su opuesto es -5, el opuesto de -5 es (-) (−5) = 5

2.6 Resta de números enteros

La resta de números enteros se obtiene sumando al minuendo **el opuesto del sustraendo**.

$$a - b = a + (-b)$$

Ejemplo:

$$7 - 5 = 7 + (-5) = 7 - 5 = 2$$
$$7 - (-5) = 7 + [-(-5)] = 7 + 5 = 12$$

Propiedades de la resta de números enteros

1. Interna
   La resta dos números enteros es otro número entero.
2. No conmutativa

   $$a - b \neq b - a$$

   Ejemplo:

   $$15 - 2 \neq 2 - 5$$

ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS ENTEROS
Ver los videos: Suma y resta de los números con signos
Suma y resta de los números enteros
Ejercicio: Suma y resta de números enteros. Números opuestos
Suma y resta de los números enteros sin paréntesis
Suma y resta de los números enteros con paréntesis

2.7 Multiplicación de números enteros

La multiplicación[6] de varios números enteros es otro número entero, que tiene como valor absoluto el producto de los valores absolutos y, como signo, el que se obtiene de la aplicación de la regla de los signos.

Regla de los signos (multiplicación/división)

- Cuando es el producto/cociente de números de **igual signo**, siempre se obtiene un número **positivo (+)**
  Ejemplo:
  5(2) = 10 -5(-2) = 10

- Cuando es el producto/cociente de números de **diferente signo**, siempre se obtiene un número **negativo (-)**
  Ejemplo:
  5(-2) = -10 -5(2) = -10

[6] La multiplicación se expresa de varias formas: $a \times b$; $a(b)$; $a \cdot b$; $a * b$
Ejemplo: 2x5, 2(5), 2·5, 2*5

Propiedades de la multiplicación de números enteros

1. *Interna*
   El resultado de multiplicar dos números enteros es otro número entero.
2. *Asociativa*
   El modo de agrupar los factores no varía el resultado. Si a, b y c son números enteros cualesquiera, se cumple que:
   $$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot a)$$
   Ejemplo:
   $$(2 \cdot 3) \cdot (-5) = 2 \cdot [(3 \cdot (-5)]$$
   $$6 \cdot (-5) = 2 \cdot (-15)$$
   $$-30 = -30$$
3. *Conmutativa*
   El orden de los factores no varía el producto.
   $$a \cdot b = b \cdot a$$
   Ejemplo:
   $$2 \cdot (-5) = (-5) \cdot 2$$
   $$-10 = -10$$
4. *Elemento neutro*
   El 1 es el elemento neutro de la multiplicación porque todo número multiplicado por él da el mismo número.
   $$a \cdot 1 = a$$
   Ejemplo:
   $$(-5) \cdot 1 = (-5)$$
5. *Distributiva*
   El producto de un número por una suma es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos.
   $$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
   Ejemplo:
   $$(-2) \cdot (3 + 5) = (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 5$$
   $$(-2) \cdot 8 = (-6) + (-10)$$
   $$-16 = -16$$
6. *Sacar factor común*
   Es el proceso inverso a la propiedad distributiva.
   Si varios sumandos tienen un factor común, podemos transformar la suma en producto extrayendo dicho factor.
   $$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$
   Ejemplo:
   $$(-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 5 = (-2) \cdot (3 + 5)$$

2.8 División de números enteros

La división[7] de dos números enteros es igual al valor absoluto del cociente de los valores absolutos entre el dividendo y el divisor y su signo se obtiene de la aplicación de la regla de los signos.
Ejemplo:

10 ÷ 5 = 2 (−10) : (−5) = 2 10 / (−5) = −2 $\frac{-10}{5} = -2$

Propiedades de la división de números enteros

1. *No interna*
   El resultado de dividir dos números enteros no siempre es otro número entero.

2. *No conmutativa*
   a : b ≠ b : a
   Ejemplo:
   6 : (−2) ≠ (−2) : 6

ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS ENTEROS
Ver los videos: Multiplicación y división de los números con signos
Multiplicación y división de números enteros
Ejercicios: Multiplicación y división de números enteros

2.9 Orden (jerarquía) de las operaciones

En matemáticas se hace necesario agrupar ciertas operaciones, para ello nos valemos de los **símbolos de agrupación** como paréntesis ( ), llaves {}, corchetes [ ], y barras | | pueden usarse para controlar aún más el orden de las cuatro operaciones aritméticas básicas.

Necesitamos un **conjunto de normas comunes** para realizar cálculos. Hace muchos años, los matemáticos desarrollaron un orden de operaciones estándar que nos indica qué operaciones hacer primero en una expresión con más de una operación. Sin un procedimiento estándar para hacer cálculos, dos personas podrían obtener diferentes resultados para el mismo problema.
Por ejemplo, 8 + 10 ÷ 2 tiene sólo una respuesta correcta. ¿Es 9 o 13?

Reglas del orden de las operaciones
1. Efectuar las operaciones que está dentro de los paréntesis (), corchetes [] y/o llaves {}.
2. Calcular las potencias (a^n) y raíces ($\sqrt{a}$). (Estas operaciones las estudiaremos más adelante)
3. Efectuar los productos ($a \times b$) y cocientes($a \div b$).
4. Realizar las sumas ($a + b$) y restas($a - b$).

SIEMPRE DE IZQUIERDA A DERECHA

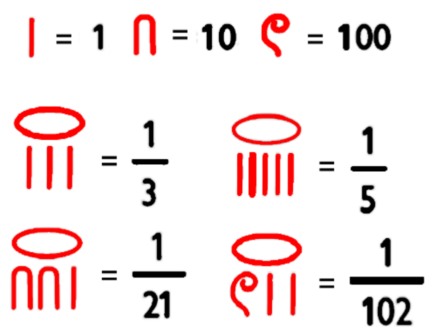
[7] La división se expresa de varias formas: $a \div b; a: b; \frac{a}{b}; a/b$
Ejemplo: : $4 \div 2; 4: 2; \frac{4}{2}; 4/2$

ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS ENTEROS
Ejercicios: Operaciones combinadas de números enteros

NÚMEROS FRACCIONARIOS

3.1 Concepto de fracción

El origen de las fracciones[8], o quebrados, es muy remoto. Los egipcios fueron los primeros en utilizarlas[9], resolvían problemas de la vida diaria mediante operaciones con fracciones: la distribución del pan, el sistema de construcción de pirámides, las medidas utilizadas para estudiar la tierra, etc. Los babilonios en el 1600 a.C. lograban aproximaciones decimales muy precisas. Los chinos en el 1500 a.C. conocían las operaciones con fracciones ordinarias logrando hallar el mínimo común denominador de varias fracciones, sin embargo, fueron los indios los que en el 500 a.C. crearon y perfeccionaron las reglas de las fracciones[10].



Jeroglíficos egipcios que representan fracciones

.

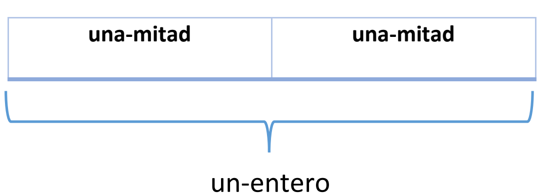

Barra de pan marcada en dos partes iguales

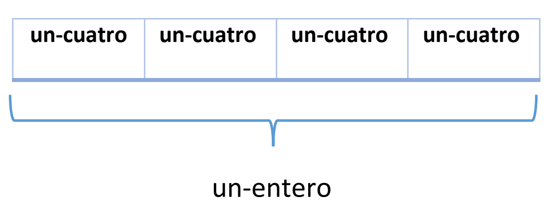

Barra de pan marcada en cuatro partes

En matemáticas, denominamos fracción a una expresión que indica una división. La barra de pan de la izquierda fue marcada en dos **partes iguales.** Si cortáramos (fraccionáramos) el pan por cada marca, cada parte sería **una de las dos** en las que se dividió, si “pegáramos” las **dos partes iguales** de pan, nos daría la **barra entera.**

De igual manera, la barra de pan de la figura de la derecha fue marcada en cuatro **partes iguales.** Si cortáramos (fraccionáramos) por cada marca el pan, cada parte sería **una de las cuatro** en las que se dividió el pan, si “pegáramos” las **cuatro partes iguales** de pan, nos daría la **barra entera.**

Esquematizando el pan, tendríamos las siguientes figuras:





[8] Del latín *fractus*, roto, o quebrado. En algunos países las fracciones también son llamadas *quebrados*.
[9] Se encontraron papiros con cálculos de quebrados que datan del 1800 a.C.
[10] En el 1492 fue cuando se comenzó a utilizar la barra horizontal por el matemático Fibonacci.

ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS FRACCIONARIOS
Ver el video: Qué son las fracciones

Ejercicios: Identificar fracciones
Fracciones y cocientes

3.2 Representación de fracciones

En matemáticas se expresan estas fracciones utilizando una línea horizontal, en la parte inferior el número entero que representa las partes en que se fraccionó la unidad (DENOMINADOR)y en la parte superior el número entero que representa las partes de la fracción que se tienen (NUMERADOR).

$$\frac{\boldsymbol{numerador}}{\boldsymbol{denominador}}$$

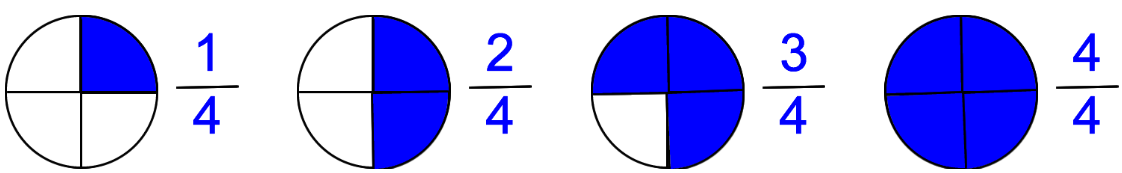
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

La unidad se ha dividido en 2 partes

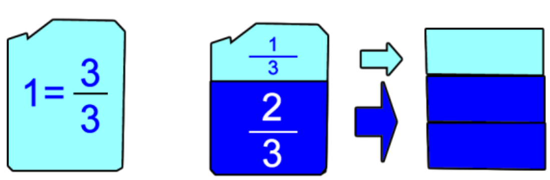
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

La unidad se ha dividido en 4 partes

Para representar fracciones dividimos la unidad en las partes que nos indique el denominador y tomamos las partes que nos indique el numerador. Cuando tomamos todas las partes en que está divida, tenemos la unidad. Observe que 4÷4=1



El todo se toma como la unidad. La fracción expresa la relación de un valor con ese todo
Ejemplo: Un depósito de gasolina contiene $\frac{2}{3}$ de gasolina. El todo es el depósito, sería una fracción con el mismo número en el numerador y el denominador (3 entre 3 es 1), por lo tanto la unidad equivale a $\frac{3}{3}$, la gasolina ocupa $\frac{2}{3}$ del total.



ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS FRACCIONARIOS
Ver el video: Representación gráfica de fracciones

Ejercicios: Identificar fracciones

3.3 Tipos de fracciones

Las fracciones tienen su propia clasificación en dependencia de la relación que existe entre el numerador y el denominador.

Fracciones propias

Las fracciones propias son aquellas cuyo numerador es menor que el denominador, Su valor está comprendido entre cero y uno.
Ejemplo: $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{33}{34}$

Fracciones impropias

Las fracciones impropias son aquellas cuyo numerador es mayor que el denominador. Su valor es mayor que 1. Las fracciones impropias contienen más de un entero.
Ejemplo: $\frac{6}{4}, \frac{7}{3}, \frac{15}{7}, \frac{34}{33}$

Fracciones decimales

Las fracciones decimales son aquellas que tienen como denominador una potencia de 10.
Ejemplo: $\frac{1}{10}, \frac{2}{100}, \frac{76}{1000}, \frac{33}{10000}$

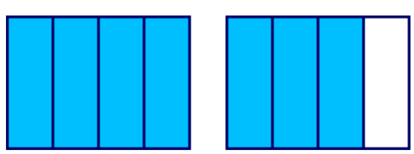
Fracción mixta o número mixto

El número mixto o fracción mixta está compuesto de una parte entera y otra fraccionaria. Se origina en una fracción impropia.

Supongamos que tenemos la fracción , $\frac{7}{4}$

Podemos descomponerlo como se observa en la figura:

- Cuatro partes de un entero dividido en cuatro partes: $\frac{4}{4}$
- Tres partes de un entero dividido en cuatro partes: $\frac{3}{4}$



$\frac{4}{4}$ $\frac{3}{4}$

Luego entonces tenemos **siete partes iguales** de enteros divididos en **cuatro partes:** $\frac{7}{4}$
Lo que podemos expresar como un entero más tres partes de cuatro.

$$1 + \frac{3}{4}$$

En las fracciones mixtas **no se coloca el signo de sumar** entre el entero y la fracción, está implícito**.**

$$1\frac{3}{4}$$

ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS FRACCIONARIOS
Ver el video: Tipos de fracciones

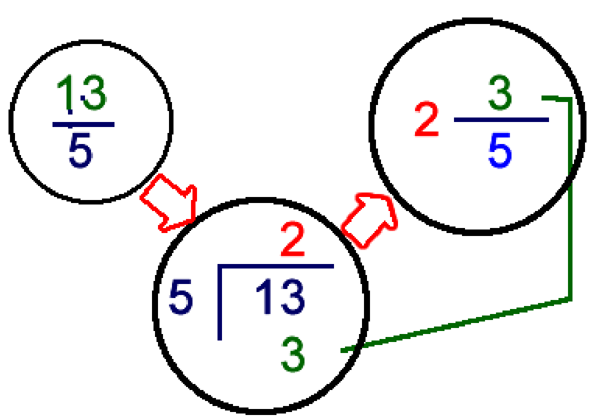
Ejercicios: Tipos de fracciones

Conversión de una fracción impropia en fracción mixta

Para llevar una fracción impropia a mixta

- Divida el numerador entre el denominador.
- El **cociente** es el **entero** del número mixto.
- El **resto** es el **numerador** de la fracción.
- El **denominador es el mismo** que el de la fracción impropia.

Ejemplo: Convertir $\frac{13}{5}$ a fracción mixta
13 entre 5 cabe a 2 (2 X 5 = 10) y sobran 3 (resto: 13-10=3).
Entonces el cociente = 2 (entero de la fracción) y el resto = 3 (numerador de la fracción) $2\frac{3}{5}$



Conversión de una fracción mixta a fracción impropia:

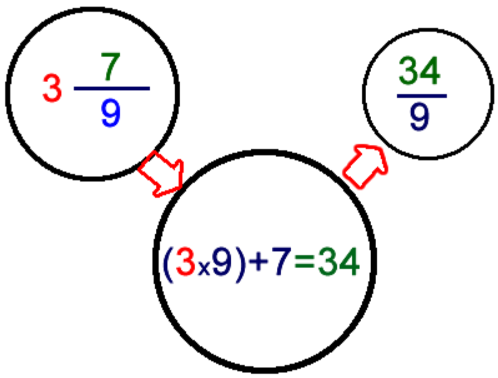
Para llevar una fracción mixta a impropia:

- Se multiplica el entero por el denominador y se le suma el numerado para obtener el nuevo numerador. del número mixto.
- Se mantiene el mismo denominador

Ejemplo: convertir $3\frac{7}{9}$ en una fracción mixta.

Multiplicamos el entero (3) por el numerador (9): 3x9=27 obteniendo el nuevo numerador.

El denominador (9) es el mismo de la parte fraccionaria del número mixto. $\frac{34}{9}$



ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS FRACCIONARIOS
Ver el video: De número mixta a impropia
De impropia a número mixto
Ejercicios: Impropias a mixtas
Mixtas a impropias

3.3 Fracciones equivalentes

Comparemos las particiones realizadas al mismo entero.

$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Podemos ver que

a) Dos mitades equivalen **a un entero**, es decir $\frac{2}{2} = 1$; el cociente de 2÷2=1

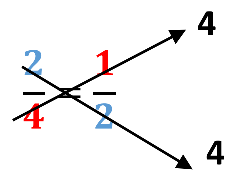
b) Dos **partes de cuatro** equivalen **a una mitad**, es decir $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;

c) El cociente de **2**÷4 = 0.5 y el de 1÷2 también es 0.5

Cuando tenemos **fracciones que tienen igual cociente**, es decir, tienen el mismo valor, estamos en presencia de las **FRACCIONES EQUIVALENTES**.

Una propiedad muy importante de las fracciones equivalentes es que **el producto de los extremos de dos fracciones equivalentes es igual al producto de sus medios.**

$$\frac{\textit{extremo izquierdo}}{\textit{medio izquierdo}} = \frac{\textit{medio derecho}}{\textit{extremo derecho}}$$



Fracciones equivalentes por ampliación

Para obtener una fracción equivalente por ampliación, debe **multiplicarse el numerador y el denominador de la fracción por el mismo factor**. El cociente de la fracción obtenida es igual a la original.

Ejemplo: Ampliemos la fracción $\frac{3}{4}$ multiplicando por 4 el numerador y el denominador**.**

$$\frac{3\times4}{5\times4} = \frac{12}{20}$$

El cociente de la fracción obtenida es igual al cociente de la fracción original.

3÷5 = 0.6   12÷20=0.6

Recuerde que debe multiplicar **ambas partes de la fracción por el mismo número**.

Fracciones equivalentes por reducción

Para obtener una fracción equivalente por reducción, debe **dividirse el numerador y el denominador de la fracción por el mismo divisor.** El cociente de la fracción obtenida es igual a la original.

Ejemplo: Reduzcamos la fracción $\frac{6}{8}$ dividiendo por 2 el numerador y el denominador.

$$\frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}$$

El cociente de la fracción obtenida es igual al cociente de la fracción original.

6÷8 = 0.75   3÷4=0.75

Recuerde que debe dividir **ambas partes de la fracción por el mismo número**.

Fracción irreducible (en algunos textos leerán irreductible)

Cuando una fracción **no admite mayor reducción**, es decir, el numerador y el denominador no comparten factores en común, estamos en presencia de una **fracción irreducible.** Las respuestas siempre se dan en su forma más reducida.

Ejemplo: $\frac{3}{4}$ es una fracción irreducible, no admite más reducción. El 3 no tiene mitad y el 4 no tiene tercera[11].

---

[11] Para los criterios de divisibilidad, vea el folleto Matemática Básica 1, Números Naturales, página 11.

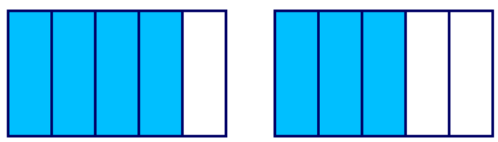
ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS FRACCIONARIOS
Ver el video: Fracciones equivalentes
Fracciones irreducibles

Ejercicios: Fracciones equivalentes
Hallar común denominador

3.4 Comparación de fracciones

Comparación de fracciones con igual denominador

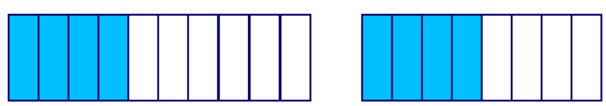
Cuando dos fracciones tienen el mismo denominador es menor la que tiene menor numerador.
Ejemplo:



$$\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$$

Comparación de fracciones con igual numerador

De dos fracciones que tienen el mismo numerador es menor el que tiene mayor denominador.
Ejemplo:



$$\frac{4}{10} < \frac{4}{8}$$

Comparación de fracciones con numeradores y denominadores diferentes

Cuando denominadores y numeradores son diferentes, debemos encontrar el mínimo común múltiplo de los denominadores y convertir en fraccione equivalentes cada una de las fracciones a partir del nuevo denominador.

Ejemplo: Ordenar de mayor a menor las siguientes fracciones: $\frac{6}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}$

Como denominadores y numeradores son diferentes, buscamos el **mínimo común múltiplo** de los denominadores

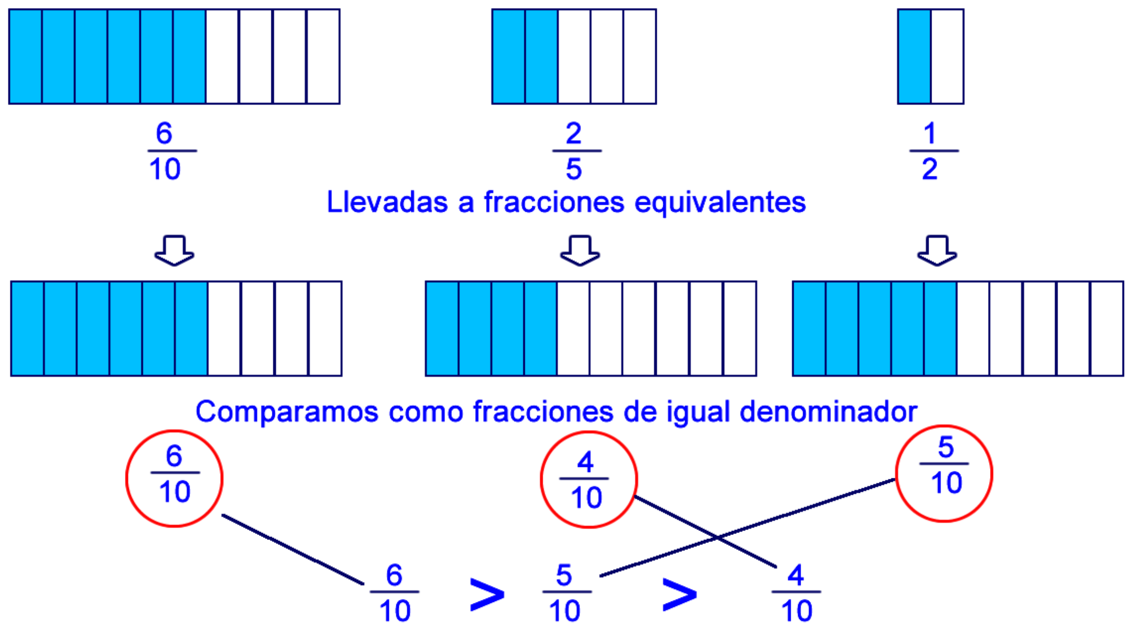
10	**5**	**2**	2
5	5	1	5
1	1		

2 x 5=10
m.c.m. (10, 5, 2) =10

Multiplicamos cada numerador y denominador por un factor que haga 10 el denominador. Recuerde que 1÷1=1, 2÷2=1, 5÷5=1, por lo que realmente estamos multiplicando por 1.

$$\frac{6}{10}\times\frac{1}{1}=\frac{6}{10} \qquad \frac{2}{5}\times\frac{2}{2}=\frac{4}{10} \qquad \frac{1}{2}\times\frac{5}{5}=\frac{5}{10}$$

Las fracciones equivalentes (por ampliación) son: $\frac{6}{10},\frac{4}{10},\frac{5}{10}$



El resultado es $\frac{6}{10} > \frac{1}{2} > \frac{2}{5}$.

ACTIVIDADES

www.estoy-aprendiendo.com

MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS FRACCIONARIOS

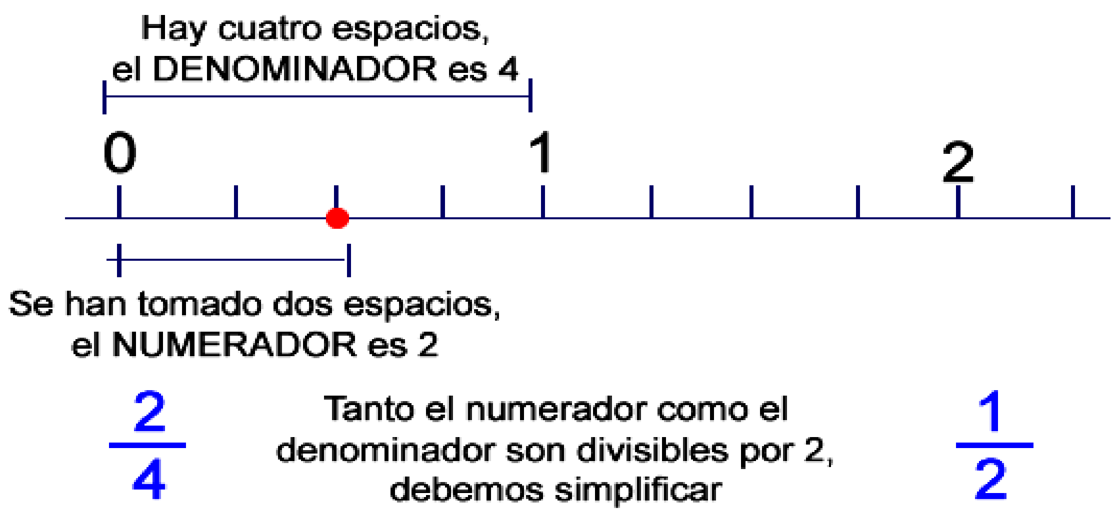
Ver el video: Fracciones equivalentes
Fracciones irreducibles

Ejercicios: Fracciones equivalentes
Hallar común denominador

3.6 Los números fraccionarios en la recta numérica

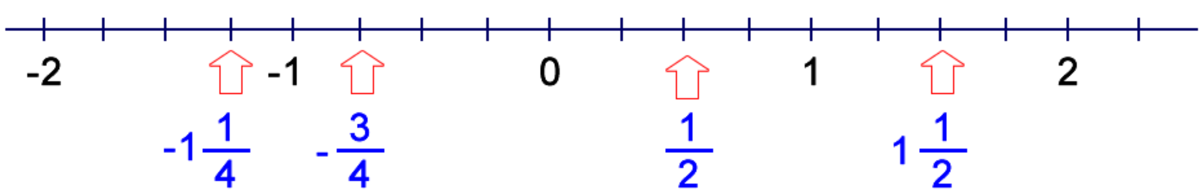
En una recta numérica una fracción es un número que corresponde a un punto ubicado en una posición intermedia entre dos números enteros. El denominador de la fracción expresa en cuántas partes iguales tenemos que dividir la unidad y, el numerador, en cuál de esos puntos se localiza el número en la recta numérica.

Ejemplo: Expresar como fracción el punto indicado en la recta numérica.



La respuesta es $\frac{1}{2}$

Las fracciones positivas se localizarán a la derecha del 0 y las negativas a la izquierda. En las fracciones mixtas primero se localiza el entero y a continuación la fracción.



ACTIVIDADES

www.estoy-aprendiendo.com

MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS FRACCIONARIOS

Ver el video: Comparación de fracciones
Ordenar fracciones
Ubicación de fracciones
Ubicar varias fracciones

Ejercicios: Comparar fracciones
Ordenar fracciones
Fracciones en la recta numérica

3.7 Operaciones con fracciones

Suma y resta de fracciones de igual denominador

Ya vimos en 3.3 que dos $\frac{1}{2}$ equivalen a un entero y cuatro $\frac{1}{4}$ también equivalen a un entero

$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Podemos escribir:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}=1 \qquad \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1+1+1+1}{4}=\frac{4}{4}=1$$

Regla de la suma/resta de fracciones con igual denominador

Cuando las fracciones tienen igual denominador (están divididas en igual cantidad de partes iguales), podemos sumar y/o restar sus numeradores (las partes que tenemos).

Ejemplos: $\frac{4}{7}+\frac{2}{7}=\frac{4+2}{7}=\frac{6}{7}$ $\qquad \frac{7}{9}-\frac{2}{9}=\frac{7-2}{9}=\frac{5}{9}$

Suma y resta de fracciones de diferente denominador

Acabamos de ver que si las fracciones tienen igual denominador, para sumarlas o restarlas solo debemos realizar las operaciones con los numeradores manteniendo el mismo denominador. También estudiamos que podemos obtener fracciones equivalentes de cualquier fracción[12] y que, además, podemos calcular un múltiplo común a varios números[13]. Estas tres habilidades matemáticas aprendidas vamos a aplicarlas para sumar/restar fracciones con diferente denominador.

Presentaremos tres métodos para realizar estas operaciones.

Método 1 (fracciones equivalentes)

Calcular $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$

Los denominadores son diferentes, luego no podemos sumar sus numeradores. Debemos buscar un número que sea múltiplo de 4 y de 2. Es evidente que 4 es el número, por lo que será nuestro común denominador. 4 ÷ 4 = 1; 4 ÷ 2 = 2

Busquemos las fracciones equivalentes que tenga como denominador el 4. $\frac{1}{4}$ tiene ya el denominador 4, nos falta $\frac{1}{2}$, que para tener como denominador 4, debemos multiplicar por $\frac{2}{2}$. Una vez con el mismo denominador, sumamos los numeradores.

[12] Ver acápite 3.3 Fracciones equivalentes, pág. 7. Matemática Básica 3 – Números fraccionarios.

[13] Ver acápite 1.14 Mínimo Común Múltiplo pág. 19, Matemática Básica 1 – Números naturales.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{2}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{1+2}{4}=\frac{3}{4}$$

La respuesta es $\frac{3}{4}$ que es una fracción irreducible.

Método 2 (cruzado)

Calcular $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$

Se multiplican los denominadores (3 y 6) y se obtiene el denominador común (18). A continuación se multiplican en cruz numerador primera fracción (2) por denominador segunda fracción (6), colocándose el resultado (12) en la nueva fracción. Se coloca el operador y se multiplica el denominador de la primera fracción (3) por el numerador de la segunda (1) colocándose el resultado (3) a continuación del operador. Se realiza la operación indicada en el numerador de la nueva fracción (12+3). La nueva fracción obtenida $\frac{15}{18}$ se reduce a $\frac{5}{6}$

$$\boldsymbol{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{12+3}{18}=\frac{15}{18}=\frac{5}{6}}$$

Método 3 (válido para cualquier cantidad de fracciones)

Calcular $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$

Los denominadores son diferentes, luego no podemos sumar sus numeradores. Debemos buscar un número que sea múltiplo de 4 y de 2. Es evidente que 4 es el número, por lo que será nuestro común denominador.

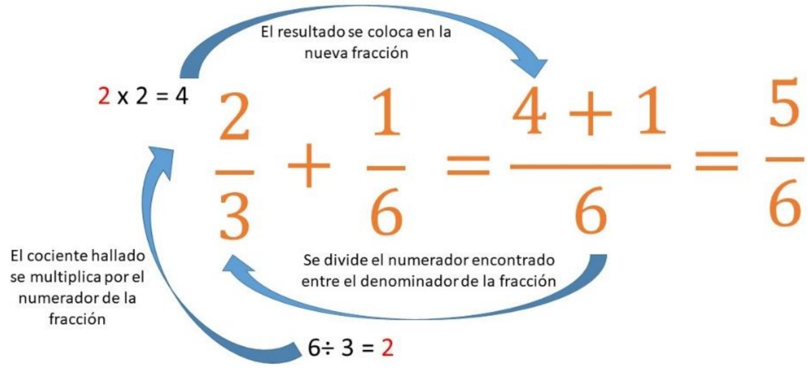
Trazamos la línea de fracción, colocamos el denominador (6) y a continuación realizamos las siguientes operaciones:

Dividimos el denominador encontrado (6) entre el denominador de la primera fracción (3), el resultado (2) lo multiplicamos por el numerador de la primera fracción y el resultado (4) lo colocamos sobre la línea de fracción.

A continuación, colocamos el signo del operador (+) y hacemos la misma operación con la segunda fracción. Nuevo numerador (6) entre el denominador de la segunda fracción (6) y el resultado (1) lo multiplicamos por el numerador de la segunda fracción (1) colocando el resultado (1) sobre la línea de fracción después del operador (+).

Sumamos los numeradores y obtenemos la nueva fracción, $\frac{5}{6}$, que es irreducible.

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{4+1}{6}=\frac{5}{6}$$



Calcular $\frac{1}{8}+\frac{5}{6}-\frac{7}{24}$

Primero buscamos el m.c.m. de 8, 6 y 24.

8	**6**	**24**	2
4	3	12	2
2	3	6	2
1	3	3	3
	1	1	

$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3 = 24$

m.c.m. (8, 6, 24) =24

Trazamos la línea de fracción, colocamos el denominador encontrado (24) y a continuación realizamos las siguientes operaciones:

Dividimos el denominador encontrado (24) entre el denominador de la primera fracción (8), el cociente encontrado (3) lo multiplicamos por el numerador de la primera fracción y el resultado (3) lo colocamos sobre la línea de fracción.

A continuación, colocamos el signo del operador (+) y hacemos la misma operación con la segunda fracción. Nuevo numerador (24) entre el denominador de la segunda fracción (6) y el resultado (4) lo multiplicamos por el numerador de la segunda fracción (5) colocando el resultado (20) sobre la línea de fracción después del operador (+).

De nuevo colocamos el operador que sigue (-), dividimos el nuevo numerador (24) entre el denominador de la tercera fracción (24) y el resultado (1) lo multiplicamos por el numerador de la segunda fracción (7) colocando el resultado (7) sobre la línea de fracción después del operador.

Sumamos los numeradores positivos teniendo en cuenta su signo. La nueva fracción, $\frac{16}{24}$, es reducible, lo que debemos simplificarla hasta llegar a una fracción irreducible. Dividiendo sucesivamente entre dos el numerador y el denominador llegamos a la fracción $\frac{2}{3}$, que es irreducible.

$$\frac{1}{8}+\frac{5}{6}-\frac{7}{24}=\frac{3+20-7}{24}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$$

ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS FRACCIONARIOS
Ver el video: Suma de fracciones
Suma y resta de fracciones
Suma de enteros y fracciones
Suma y resta con mixtos

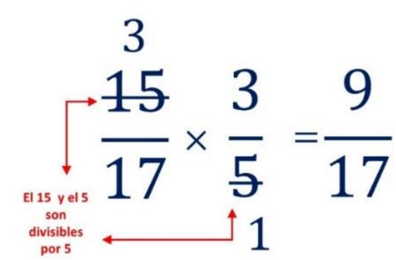
Ejercicios: Sumar y restar fracciones
Sumas-Restas fracciones propias
Sumas-Restas fracciones mixtas
Sumas-Restas fracciones propias y mixtas

Multiplicación de fracciones

La multiplicación es la operación más sencilla de las fracciones. Se realiza linealmente, es decir, numerador por numerador da como resultado el numerador del producto y denominador por denominador da como resultado el denominador del producto.

En la multiplicación se puede simplificar cualquier numerador con cualquier denominador.

Ejemplo: $\frac{1}{8}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{9}=\frac{1\times5\times7}{8\times6\times9}=\frac{35}{432}$



ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS FRACCIONARIOS
Ver el video: Multiplicación de fracciones
Multiplicación de fracciones mixtas
Multiplicación de 3 fracciones mixtas

Ejercicios: Multiplicar y dividir fracciones
Multiplicación-División Mixtas y propias
Operaciones combinadas de fracciones

División de fracciones

Método 1 (en cruz)

Este método consiste en multiplicar el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción y el resultado colocarlo en el numerador de la fracción final. Por otro lado, tenemos que multiplicar el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción y el resultado lo escribimos en el denominador de la fracción final.

$$\frac{3}{7} \div \frac{5}{8} = \frac{24}{35}$$

Método 2 (multiplicar por el inverso)

Este método consiste en **multiplicar** la primera fracción por el inverso de la segunda fracción.

Cambia el signo

$$\frac{3}{7} \div \frac{5}{8} = \frac{3}{7} \times \frac{8}{5} = \frac{24}{35}$$

RECIPROCO

ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS FRACCIONARIOS **Ver el video:** División de fracciones Suma y resta de fracciones Suma de enteros y fracciones Suma y resta con mixtos **Ejercicios:** Multiplicar y dividir fracciones Multiplicación-División Mixtas y propias Operaciones combinadas de fracciones

4.NUMEROS DECIMALES

Un número decimal, por definición, es la expresión de un **número** que tiene dos partes: una **parte no entera (incluido el cero) y una parte decimal,** ambas partes están separada por un **punto**[14]. **A** diferencia de los números fraccionarios, los números decimales no se escriben como el cociente de dos números enteros sino como una aproximación de dicho valor.

4.1 Clasificación de los números decimales

Números decimales exactos.

Cuando la parte decimal posee un **número limitado** de cifras decimales.

0.1; 0.275; 4.35698; 2.5469

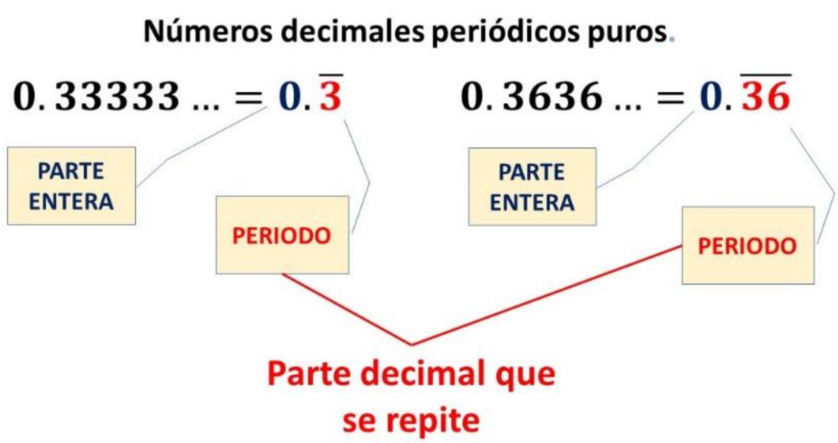
Números decimales infinitos.

Cuando la parte decimal tiene un número infinito de cifras decimales. Una o más cifras decimales se repiten infinitamente. La parte que se repite se llama **período**. Se clasifican en infinitos periódicos e infinitos NO periódicos (irracionales):

Números decimales infinitos periódicos

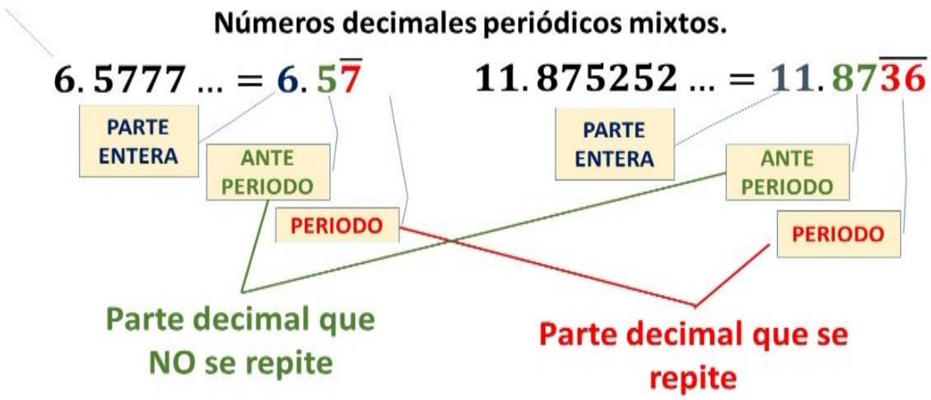
Son aquellos que tienen un número ilimitado o infinito de cifras decimales, que se repiten en un patrón o **período** determinado.

- ***Números decimales periódicos puros***.
  Tienen cifras decimales que se repite indefinidamente: 0.33333…, 0.363636…, la parte que se repite se señala con una barra horizontal encima. $0.\overline{3}; 0.\overline{36}$



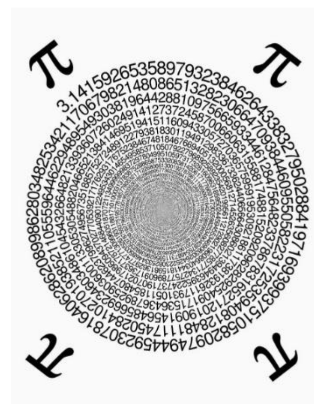
[14] Existen varias formas de separar los números decimales; puede ser con un punto (.), con una coma (,), en Estados Unidos se utiliza el punto decimal. La ISO 80000-1, del año 2009, admite ambos signos, cancelando la anterior recomendación de la coma de la norma ISO 31-0. «Los números pueden agruparse de tres en tres para facilitar la lectura; **pero no se deben utilizar ni comas ni puntos en los espacios entre grupos**». Por su parte, las Academias de la Lengua Española recomiendan en la Ortografía de la lengua española: «Con el fin de promover un proceso tendente hacia la unificación, **se recomienda el uso del punto como signo separador de los decimales**».

- ***Números decimales <u>periódicos mixtos</u>*.**
  En ellos existen cifras decimales que no se repiten (están fuera del periodo o patrón): 2.125333333. La barra horizontal se coloca solamente sobre las cifras o período que se repiten. A los decimales que no se repiten se les llama ante período: $6.5\overline{7}$; $11.87\overline{52}$



Números irracionales o decimales infinitos <u>no periódicos</u>.

Estos números tienen cifras decimales infinitas que no pueden ser definidas como un patrón, son los **números irracionales**.



$$\pi = 3{,}141592654\ldots$$

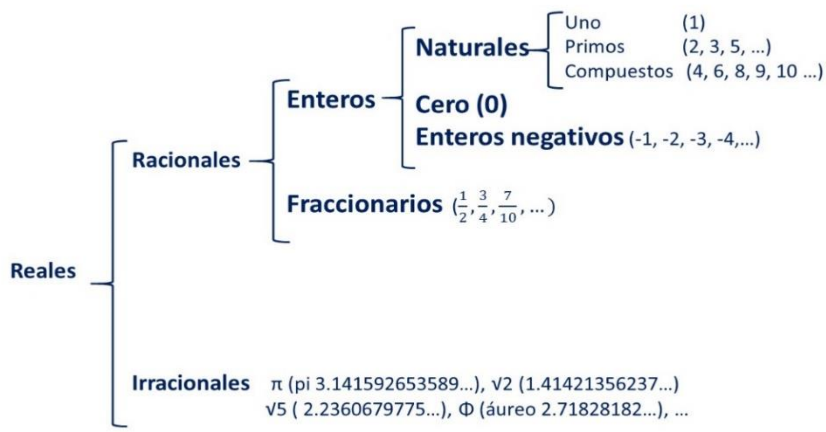
El número π es un número con infinitas cifras decimales que no tiene período. No se puede escribir como una división de números enteros (fracción).

El **número Pi** (π) es el cociente entre el perímetro de la circunferencia y la longitud de su diámetro. La aproximación de su número es 3.141592653589… A efecto de los **ejercicios,** si no se indica lo contrario, **su valor será 3.14**

ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS DECIMALES **Ver el video:** Clasificación de los números decimales **Ejercicios:** Clasificación decimales

4.2 Clasificación de los números reales

Todos los números que hemos estudiado hasta ahora se conocen como **NÚMEROS REALES** y están representados en el siguiente gráfico.



4.3 Composición de un número decimal

Al igual que los números naturales, los números decimales tienen su propia composición.
La parte entera se compone de la misma manera que los números naturales.
La parte decimal se compone, a partir del punto decimal hacia la derecha, por las décimas, centésimas, milésimas, diez milésimas, cien milésimas, etc.

Vea en la tabla a continuación la representación.
En la tabla, la primera columna representa la **centena**, la segunda la **decena** y la tercera la **unidad (igual que los números naturales)**. A continuación, aparece el **punto decimal**. La cuarta columna representa las **décimas** (la unidad dividida en 10 partes iguales), la quinta representa las **centésimas** (la unidad dividida en 100 partes iguales) y la séptima representa las **milésimas** (la unidad dividida en 1000 partes iguales). A continuación, irían las diezmilésimas, las cienmilésimas, etc.

1ro	2do	3ro	4to	5to	6to	7mo
	PARTE ENTERA		PUNTO DECIMAL		PARTE DECIMAL	
CENTENA	DECENA	UNIDAD		DÉCIMA	CENTÉSIMA	MILÉSIMA
100	10	1	•	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
100	10	1		0.1	0.01	0.001

En el ejemplo de la figura, el número **623.175** tiene una parte entera 623 (6 centenas, 2 decenas y 3 unidades) y separada del punto el decimal 175 (1 décima, 7 centésimas y 5 milésimas). La parte decimal de un número se ubica al **lado derecho del punto.** En el caso de que un número decimal **no posea una parte entera,** se procede a escribir un cero al lado izquierdo del punto, por ejemplo 0.1245

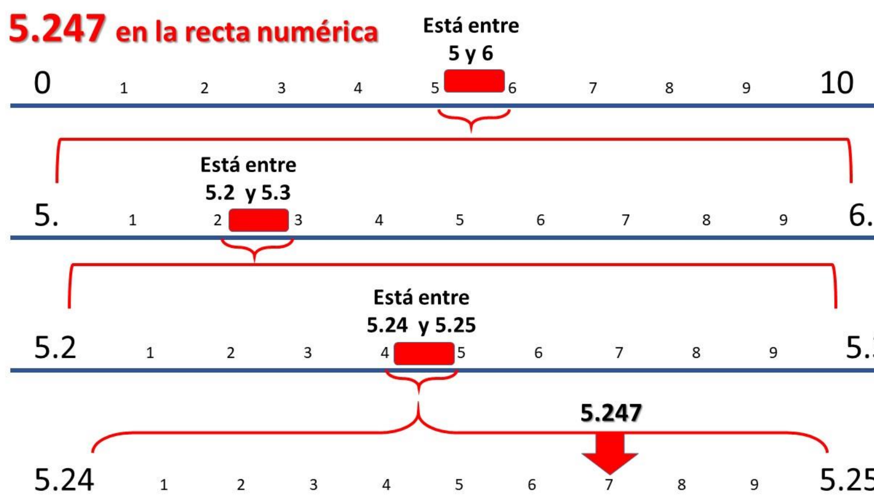
4.4 Los números decimales en la recta numérica

Todo número racional tiene su representación en la recta numérica. En el caso de los decimales su representación requiere la división en partes exactas del espacio entre dos números:

- Para representar las **décimas** dividimos la **unidad en 10 partes**.
- Para representar las **centésimas** dividimos cada **décima en 10 partes** o la **unidad en 100 partes**.
- Para representar las **milésimas** dividimos cada **centésima en 10 partes**, o las centésimas en 100 partes o **la unidad en 1000 partes** y así continuaríamos para las diez milésimas, cien milésimas, etc.

eamos el número **5.247,** en la gráfica

.



- El número **5.247** está ubicado entre los números enteros **5 y 6**.
- Si corremos un lugar decimal hacia la derecha (**posición de las décimas**), observamos que el número está entre 5.2 y 5.3.
- Si corremos otro lugar decimal (**posición de las centésimas**), el número estaría entre **5.24** y **5.25**. Finalmente, al correr otro lugar decimal más (**posición de las milésimas**), llegamos a la ubicación exacta del número **5.247 en la Recta Numérica.**

NO **HAY DOS NÚMEROS DECIMALES CONSECUTIVOS**, porque entre dos decimales siempre se pueden encontrar otros decimales (de hecho, **entre dos decimales siempre se pueden encontrar infinitos decimales**).

5.2	**5.24**	**2.3**
2.24	**2.247**	**2.25**
2.247	**2.2476**	**2.248**
2.2476	**2.24768**	**2.2476**

Dados dos números decimales es menor:

- **El que tenga menor la parte entera**. Ejemplo: **3**.528 < **5**.00001 < **7**.36
  3 es menor que 5 y ambos son menores que 7
- **Si tienen la misma parte entera, el que tenga menor parte decimal**.
- Ejemplo: 3.**00001** < 3.**36** < 3.**528**
  Para ayudar a "ver" el decimal menor, multiplicamos por un múltiplo de 10 que contenga tantos ceros como lugares tiene el que mayor cantidad de lugares decimales tenga (en este caso la parte decimal 0.00001 tiene 5 lugares decimales, multiplicamos por 100 000)
  1 < 36000 < 528000

ACTIVIDADES

www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS DECIMALES
Ver el video: Cómo ubicar números decimales en la recta numérica.
Ejercicios: Decimales recta numérica

4.5 Redondeo de números decimales

Truncamiento (eliminación) de números decimales

Para truncar (eliminar) un número decimal hasta un orden determinado se colocan las cifras anteriores hasta ese orden, eliminando las demás.
Ejemplo:
Truncar 2.3647 hasta las décimas: 2.3 (se eliminaron los decimales después de la décima)
Truncar 2.3647 hasta las centésimas: 2.36 (se eliminaron los decimales después de la centésima)
Truncar 2.3647 hasta las milésimas: 2.364 (se eliminaron los decimales después de la milésima)
SE TOMAN SOLAMENTE LAS CIFRAS QUE HAY EN EL NÚMERO SIN MODIFICACIÓN

Redondear un número decimal al número entero más cercano

Para redondear un número a la unidad tenemos que fijarnos en la primera cifra después del punto decimal.
Si la cifra es 0, 1, 2, 3, 4 (menor que 5) solamente escribimos el número entero.
Si la cifra es 5, 6, 7, 8, 9, (igual o mayor que 5) le sumamos uno (1) a la posición de las unidades del número
Ejemplos:

a) **Redondear al entero más cercano el número 782.4**
   La cifra que está a la derecha del punto decimal es 4, cuyo valor es menor que 5 (4<5), por lo tanto, escribimos el número entero sin decimales: 782.
b) **Redondear al entero más cercano el número 436.8**
   La cifra que está a la derecha del punto decimal es 8 (8>5), cuyo valor es mayor que 5, por lo tanto, sumamos uno a la unidad y escribimos el número entero sin decimales: 437.
c) **Redondear al entero más cercano el número 439.5**
   La cifra que está a la derecha del punto decimal es 5, cuyo valor es mayor que mayor o igual a 5 (5 ≥ 5), por lo tanto, sumamos uno a la unidad, pero al darnos 10, colocamos un cero en las unidades y sumamos uno (1) a las decenas y escribimos el número entero sin decimales: 440.

Redondear un número decimal al número decimal indicado más cercano

El principio es el mismo, ver el número decimal que está a la derecha del que vamos a redondear. Se cumple la misma regla:
Si la cifra es 0, 1, 2, 3, 4 (<5) solamente escribimos el número decimal y truncamos el resto de los decimales.
Si la cifra es 5, 6, 7, 8, 9, (≥ 5) le sumamos uno (1) a la posición decimal que deseamos redondear y truncamos el resto de los decimales.
Ejemplos:

a) Redondear a la décima más cercana el número 78.249
La posición de la décima la ocupa el 2. La cifra que está a la derecha de la décima (2) es el 4, cuyo valor es menor que 5 (4<5), por lo tanto, escribimos el número entero con la décima sin modificar y truncamos el resto de los decimales: 78.2

b) Redondear a la centésima más cercana el número 5.25834
La posición de la centésima la ocupa el 4. La cifra que está a la derecha de la centésima (4) es el 8, cuyo valor es mayor que 5 (8 > 5), por lo tanto, escribimos el número entero con la centésima aumentada en 1 (en este caso 8+1=9) y truncamos el resto de los decimales**: 5.26**

c) Redondear a la milésima más cercana el número 36.1296532
La posición de la milésima la ocupa el 9. La cifra que está a la derecha de la centésima (9) es el 6, cuyo valor es mayor que 5 (6 > 5), por lo tanto, debemos aumentar en 1 la milésima (en este caso 9+1=10). Como es mayor que 10, ponemos 0 en la milésima y aumentamos 1 en la centésima y truncamos el resto de los decimales**: 36.130**

ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS DECIMALES
Ver el video: Redondear y truncar números decimales

Ejercicios: Decimal y truncamiento
Redondeo decimales

4.6 Operaciones con números decimales

Suma y resta de números decimales

Para sumar y restar números decimales, debemos anotar cada valor en forma vertical de tal manera que **el punto quede en la misma columna (uno debajo del otro)**, incluso si la parte entera de un valor tenga más cifras que el otro, como se ve en el ejemplo siguiente:

3	**.**	**4**	**8**	
9	**.**	**6**	**5**	**7**

A continuación, se iguala el número de cifras decimales de cada valor si es necesario, añadiendo uno o varios ceros al valor con menos cifras decimales para que queden con el mismo número, pues **el cero añadido a la derecha de la parte decimal no altera el valor**, así:

3	**.**	**4**	**8**	**0**
9	**.**	**6**	**5**	**7**

Finalmente se suma de manera tradicional, sin tomar en cuenta el punto, y al resultado final se le añade el punto en la misma posición que se encuentra en ambos valores sumados o restados.

	3	**.**	**4**	**8**	**0**
+	**9**	**.**	**6**	**5**	**7**
1	**3**	**.**	**1**	**3**	**7**

Actividades:
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS DECIMALES
Ver el video: Suma y resta de números decimales

Ejercicios: Suma decimales

Ejemplo: Restar 6.1 – 4.129.
Se colocan los números siguiendo los mismos principios dados anteriormente: anotar cada valor en forma vertical de tal manera que **el punto quede en la misma columna**, incluso si la parte entera de un valor tenga más cifras que el otro. Restar de manera tradicional, sin tomar en cuenta el punto, y al resultado final se le añade el punto en la misma posición

	6	**.**	**1**	**0**	**0**
+	**4**	**.**	**1**	**2**	**9**
	1	**.**	**9**	**7**	**1**

Actividades:
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS DECIMALES
Ver el video: Suma y resta de números decimales

Ejercicios: Resta decimales

Multiplicación de números decimales

Para multiplicar dos números decimales, o un número decimal por un número entero, se resuelve la operación sin tomar en cuenta el punto. El número de cifras decimales será la suma del número de cifras decimales de los dos factores.

Multiplicar un decimal por un entero: 3.25 x 2
Multiplicamos 325 x 2
El resultado es 650
Hay **2 cifras decimales**
Corremos hacia la izquierda el punto decimal **dos lugares**.
El producto es **6.50**

		3.	**2**	**5**
x				**2**
		6.	**5**	**0**

Multiplicar dos decimales: 3.25 x 2.7
Multiplicamos los números 325 x 27
El resultado es 8775
Entre ambos tienen en total **3 cifras decimales**
Corremos a la izquierda el punto decimal **tres lugares**.
El producto resultante es **8.775**

		3.	**2**	**5**
x			**2.**	**7**
	2	**2**	**7**	**5**
	6	**5**	**0**	
	8.	**7**	**7**	**5**

Multiplicación de números decimales por la unidad seguida de ceros

Para multiplicar números decimales por cifras que son múltiplos de diez, solo corremos el punto hacia la derecha tantos espacios como ceros tenga el múltiplo de diez. Si no hay más cifras decimales, se añaden ceros al resultado.

2.5698	**x**	**10**	**=**	**25.698**
2.5698	x	100	=	256.98
2.5698	x	1 000	=	2 569.8
2.5698	x	10 000	=	25 698
2.5698	x	100 000	=	256 980
2.5698	x	1 000 000	=	2 569 800
2.5698	x	10 000 000	=	25 698 000

ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS DECIMALES
Ver el video: Multiplicación de números decimales

Ejercicios: Multiplicar decimales

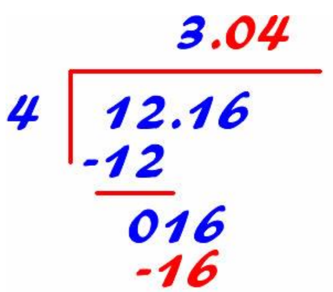
División de números decimales

Existen tres posibilidades:

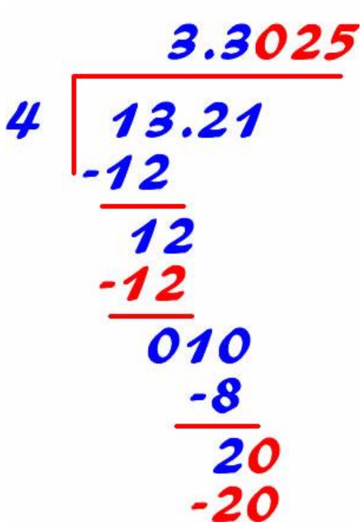
a) El dividendo es decimal y el divisor un entero
b) El divisor es decimal y el dividendo un entero
c) Divisor y dividendo son decimales

El dividendo es un decimal y el divisor un entero

Cuando el dividendo es decimal, se realiza la división sin tomar en cuenta el punto y al obtener la primera cifra decimal, se pone el punto en el cociente y se sigue dividiendo de manera normal.
Se efectúa la división de números decimales como si de números enteros se tratara. Cuando bajemos la primera cifra decimal, colocamos una coma en el cociente y continuamos dividiendo.
Ejemplo: 12.16 ÷4 y 13.21 ÷ 4



12 entre 4 cabe a 3, lo resto al 12 y queda 0.
Como a continuación viene el **punto decimal**, lo escribo en el cociente.
Bajo el 1, que no cabe entre 4, escribo un cero a continuación del punto decimal y bajo el 6.
Se forma el número 16 que entre 4 cabe a 4, el resto es 0.

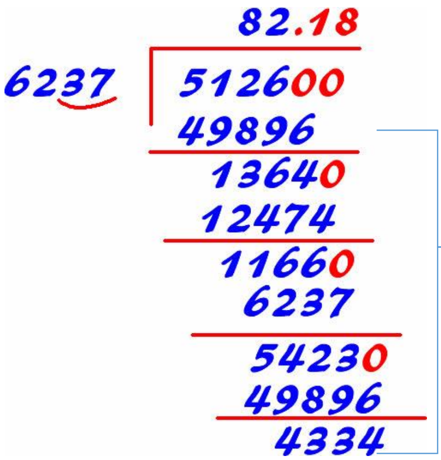


13 entre 4 cabe a 3, al restar 12 (4x3) a 13 y me queda 1.
Viene el **punto decimal**, lo escribo en el cociente.
Bajo el 2, me forma el número 12. 12 entre 4 cabe a 3. Pongo el 3 a continuación del punto decimal y al multiplicar éste por 4 me queda 0.
Bajo el 1, no cabe entre 4, por lo tanto, coloco un cero en el cociente y agrego un cero al 1. Se forma el número 10, que entre 4 cabe a 2 y sobran 2. Pongo el 2 en el cociente y resto el producto de 2 por 8 de 10.
Me quedan 2, le agrego un cero para seguir encontrando decimales.
Se forma el número 20, que entre 4 cabe a 5 un resto 0.

El divisor es decimal y el dividendo un entero

Cuando el decimal se encuentra en el divisor, se debe correr el punto hasta el final de la cifra del divisor, añadiéndose en el dividendo ceros en la misma cantidad de espacios recorridos por el punto. Y se procede a dividir de manera normal.
Quitamos la coma del divisor y añadimos al dividendo tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor. A continuación dividimos como si fueran números enteros.

Ejemplo: 5126÷ 62.37 = 82.18



62.37 tiene dos lugares decimales, corremos el punto a la derecha dos posiciones y agregamos dos ceros al dividendo.

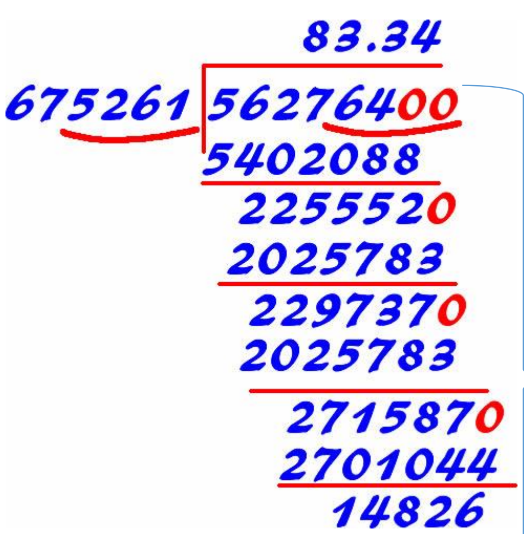
La división continúa igual que la de dos enteros.

Divisor y dividendo son decimales

Cuando el dividendo y el divisor son números decimales, recorremos las puntos por tantos espacios sean necesarios para que desaparezca del **número con más cifras decimales**. Mientras que en el número que tiene menos cifras decimales se irán **añadiendo ceros según** los espacios que falten, y se procede a dividir de la manera tradicional.

Se iguala el número de cifras decimales del dividendo y del divisor, añadiendo a aquel que tenga menos decimales, tantos ceros como cifras decimales de diferencia haya. A continuación se prescinde de la coma, y dividimos como si fueran números enteros.

Ejemplo: 5627.64÷ 67.5261 = 83.34



62.5261 tiene cuatro lugares decimales, corremos el punto a la derecha cuatro posiciones. Corremos el punto decimal del dividendo cuatro lugares, colocando ceros en los espacios vacíos desde la última cifra significativa y la nueva posición del punto decimal.

La división continúa igual que la de dos enteros.

División de números decimales por la unidad seguida de ceros

Cuando dividimos un número decimal por un número múltiplo de diez, corremos hacia la izquierda el punto decimal tantas veces como 0 tenga el múltiplo de 10.

Los espacios entre el punto y el primer dígito significativo deben rellenarse con ceros (0)

2.5698	÷	**10**	=	**0.25698**
2.5698	÷	100	=	0.025698
2.5698	÷	1000	=	0.0025698
2.5698	÷	10000	=	0.00025698
2.5698	÷	100000	=	0.0000256980
2.5698	÷	1000000	=	0.000002569800
2.5698	÷	10000000	=	0.00000025698000

ACTIVIDADES

www.estoy-aprendiendo.com

MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS DECIMALES

Ver el video: División de números decimales

Ejercicios: Dividir decimales

Operaciones combinadas con decimales

4.8 EXPRESAR FRACCIONES COMO DECIMALES

Para convertir fracciones en números decimales tenemos tres posibles caminos, dependiendo de con qué números estemos trabajando:

División del numerador entre el denominador.

ACTIVIDADES

www.estoy-aprendiendo.com

MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS DECIMALES

Ver el video: Como convertir fracciones a decimales

4.9 EXPRESAR DECIMALES COMO FRACCIONES

Transformación de un decimal finito a fracción

1. En el numerador se escribe el número y se le restan los números enteros que están antes del punto decimal.
2. En el denominador se colocan tantos 9 como números tiene el período.
3. Se reduce si lo admite.

Ejemplo 1: Convertir 0.045 en fracción
Anotamos en el numerador las cifras significativas del número, en este caso 45. En el denominador escribimos el 1 seguido de tantos ceros como decimales tenga el número, en este caso 1.000, porque hay tres espacios decimales ocupados. A continuación simplificamos la fracción obtenida.

$$0.045 = \frac{45 \;\div 5}{1000 \;\div 5} = \frac{9}{200}$$

Ejemplo 2: Llevar 1.2 a fracción

$$1.2 = \frac{12 \;\div 2}{10 \;\div 2} = \frac{6}{5}$$

$$= \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

$$1.2 = 1\frac{1}{5}$$

ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS DECIMALES
Ver el video: Como convertir un decimal finito en fracción

Transformación de un decimal infinito periódico en fracción

1. Se anota el número y se le resta él o los números que están antes del período (de la rayita)
2. Se coloca como denominador un 9 por cada número que está en el período (si hay un número bajo la rayita se coloca un 9, si hay dos números bajo el período se coloca 99, etc.). Si se puede simplificar, se simplifica.

$$2.666... = 2.\overline{6}$$

$$2.\overline{6} = \frac{26-2}{9} = \frac{24}{9}$$

$$= \frac{24 \;\div 3}{9 \;\div 3} = \frac{8}{3}$$

$$= \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

$$2.\overline{6} = 2\frac{2}{3}$$

Otro ejemplo: Expresar como fracción 57,18181818....

$$57.181818\ldots = 57.\overline{18}$$

$$57.\overline{18} = \frac{5718-57}{99}$$

$$= \frac{5661 \;{\scriptstyle \div 9}}{99 \;{\scriptstyle \div 9}} = \frac{629}{11}$$

$$= \frac{629}{11} = 57\frac{2}{11}$$

$$57.\overline{18} = 57\frac{2}{11}$$

ACTIVIDADES

www.estoy-aprendiendo.com

MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS DECIMALES

Ver el video: Como convertir un decimal infinito periódico en fracción

Transformación de decimal infinito semiperiódico a fracción

1. El numerador de la fracción se obtiene, al igual que en el caso anterior, restando al número la parte entera y el ante período, o sea, todo lo que está antes de la “rayita”.
2. El denominador de la fracción se obtiene colocando tantos 9 como cifras tenga el período y tantos 0 como cifras tenga el ante período. Como siempre, el resultado se expresa como fracción irreductible (no se puede simplificar más) o como número mixto.

$$2.466\ldots = 2.4\overline{6}$$

$$2.4\overline{6} = \frac{246-24}{90} = \frac{222}{90}$$

$$= \frac{222 \;{\scriptstyle \div 6}}{90 \;{\scriptstyle \div 6}} = \frac{37}{15}$$

$$= \frac{37}{15} = 2\frac{7}{15}$$

$$2.4\overline{6} = 2\frac{7}{15}$$

ACTIVIDADES

www.estoy-aprendiendo.com

MATH→ MAT. BÁSICA → NÚMEROS DECIMALES

Ver el video: Como convertir un decimal infinito semiperiódico en fracción

5. RAZONES, PROPORCIONES Y TANTO POR CIENTO

5.1 Magnitudes

En la vida cotidiana, trabajamos constantemente con las magnitudes. **Una magnitud es aquello que se puede medir**. Por ejemplo, la cantidad de estudiantes en un aula, la presión arterial de una persona, la cantidad de uvas de un racimo, la cantidad de calorías que tiene un alimento, la distancia entre dos ciudades, la velocidad de un avión volando, etc. Todas estas magnitudes se pueden relacionar entre sí.

- La cantidad de estudiantes de un aula con la cantidad de asientos.
- La presión arterial de una persona con la cantidad de medicamentos que debe tomar.
- La cantidad de uvas de un racimo con su peso
- La cantidad de calorías de un alimento con el aumento de peso de una persona
- La distancia entre dos ciudades con el tiempo que se tarda en ir de una a otra.
- La velocidad de un avión y el tiempo de llegada a un aeropuerto

Las magnitudes pueden ser escalares y vectoriales.

- Las **magnitudes escalares** son aquellas magnitudes físicas que quedan descritas completamente mediante un valor numérico. Ejemplos de magnitudes escalares son masa, volumen, temperatura, densidad, presión, energía, carga eléctrica, etc
- Las **magnitudes vectoriales** son aquellas magnitudes físicas que son descritas mediante un valor numérico o magnitud, llamada módulo, y una orientación en el espacio. Por ejemplo, son magnitudes vectoriales la aceleración, la velocidad de desplazamiento, campo eléctrico, el peso o cualquier otra forma de fuerza, por ejemplo la fuerza de la gravedad.

En nuestros ejemplos solamente trabajaremos con magnitudes escalares.

ACTIVIDADES

www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → RAZONES Y PROPORCIONES
Ver el video: Magnitudes escalares y vectoriales. Conceptos y ejemplos

5.2 Razón

La razón es la **comparación de dos magnitudes** y se mide a partir del cociente (división) de esas dos cantidades. Es importante saber que esos valores tienen que estar **en la misma unidad de medida**.
Las razones parecen fracciones, pero se diferencian porque en las razones, tanto el numerador como el denominador, pueden **ser números no enteros**.

Si se va a expresar la razón como **fracción** ($\frac{a}{b}$) o **relación** (a:b), esta debe reducirse hasta la forma más simple. Una razón también puede expresarse como un **tanto por ciento**.

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}} \qquad \boldsymbol{a:b}$$

Ejemplo:
En la *Escuela Primaria La Catrina*, el quinto grado tiene solamente 5 alumnos y todos son varones. De ellos, 2 tienen sobrepeso. ¿Cuál es la razón de niños con sobrepeso del quinto grado?

Total de niños varones: 5 Total de niños con sobrepeso: 2 Relación 2:5 Razón: 0.4

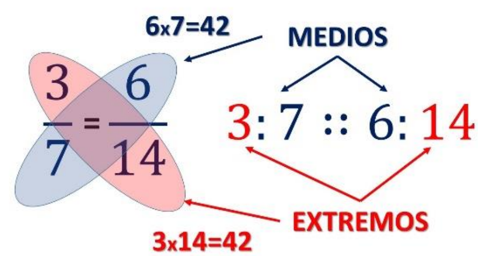
ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → RAZONES Y PROPORCIONES
Ver el video: Razones. ¿Qué es una razón?

5.3 Proporción

Cuando dos o más razones son iguales, decimos que forman una proporción.

$$Si\ \frac{a}{b} = h\ \ y\ \ \frac{c}{d} = h\ entonces\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, luego\ son\ proporciones$$

Los términos **a** y **d** se denominan extremos mientras que **b** y **c** son los medios.
En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios



ACTIVIDADES
www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → RAZONES Y PROPORCIONES
Ver el video: Proporciones. ¿Qué es una proporción?

5.4 Proporcionalidad

Muchas veces en la práctica se nos presentan situaciones en las que el valor o cantidad de una magnitud depende del valor de la otra. Por ejemplo, si un metro de tela tiene un precio de $ 10, el costo de un corte de tela depende del número de metros que tenga el largo. A mayor número de metros de tela corresponde un mayor costo.

Proporcionalidad directa

Cuando dos magnitudes están relacionadas de modo que los valores de una de ellas se obtienen multiplicando por un mismo número los valores correspondientes en la otra, se dice que son directamente proporcionales.

Para que dos magnitudes mantengan una relación de proporcionalidad directa tienen que estar relacionadas de tal forma que, si aumentamos una, aumenta la otra; si disminuimos una, disminuye la otra, **siempre proporcionalmente**.
El **cociente** entre dos magnitudes directamente proporcionales **es siempre constante**.

En una proporcionalidad directa dos cantidades cualesquiera de una magnitud y sus correspondientes en la otra forman una proporción.

En la tabla a continuación se muestra el costo por noche de una habitación en el Hotel Las Calandrias. Observe que la relación Costo/Día es constante e igual a 70.

COSTO POR DIA HOTEL LAS CALANDRIAS		RELACIÓN COSTO/DÍA
DIAS	COSTO (DÓLARES)	
1	70	70
2	140	70
3	210	70
4	280	70
5	350	70

ACTIVIDADES

www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → RAZONES Y PROPORCIONES
Ver el video: Proporcionalidad directa. Aplicaciones
Ejercicios: Proporción directa

Proporcionalidad inversa

Existen otras formas de relaciones entre magnitudes en las que el comportamiento es diferente al de los ejemplos dados de proporcionalidad directa, en estos casos, si los valores de una aumentan, los valores correspondientes en la otra disminuyen.

Por ejemplo, si un automóvil se desplaza con una cierta velocidad y la aumenta, el tiempo que demora en llegar a su destino disminuye.

Cuando dos magnitudes están relacionadas de modo que el aumento (disminución) de una implica la disminución (aumento) de la otra, se dice que son **inversamente proporcionales**

Tiempo que se tarda en construir un edificio en función del número de obreros que trabajen	
Obreros (x)	Días (y)
10	336
20	168
30	112
40	84

En la tabla de la izquierda se muestra la cantidad de días que se demora la construcción de un edificio en función de la cantidad de obreros.

A simple vista se observa que a medida de AUMENTA la cantidad de obreros DISMINUYE la cantidad de días de construcción.

Ambas magnitudes son **INVERSAMENTE PROPORCIONALES.**

ACTIVIDADES

www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → RAZONES Y PROPORCIONES
Ver el video: Identificar proporcionalidad inversa
Ejercicios: Proporción inversa

5.5 Tanto por ciento

El tanto por ciento es una forma de expresar un número como una fracción de 100, es decir, es una cantidad que se corresponde **PROPORCIONALMENTE** a una **PARTE DE CIEN**. Resumiendo, calcular el tanto por ciento es sencillamente calcular una proporción.

$$\frac{\%}{100} = \frac{parte}{todo}$$

Tres son las posibles preguntas sobre el tanto porciento:

1. Qué Tanto por ciento es un número de otro:

$$\frac{\%}{100} = \frac{parte}{todo}$$

El aula 3118 tiene **32 alumnos**, de los cuales **10 son varones**. ¿Qué por ciento representan los varones del total de alumnos?

$$\frac{\%}{100} = \frac{10}{32}, \quad \% = \frac{100 \times 10}{32} = \frac{1000}{32} = 31.25$$

Los varones representan en 31.25%

ACTIVIDADES

www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → TANTO POR CIENTO
Ver el video: Porcentajes
Ejercicios: Por Ciento I

2. Qué número es el Tanto por ciento de otro.

$$\frac{\%}{100} = \frac{parte}{todo}$$

La fábrica de caramelos tiene **1230 empleados**, de los cuales el **62% son mujeres**. Cada una debe llevar una redecilla para el pelo ¿Cuántas redecillas deben ser compradas por la fábrica?

$$\frac{62}{100} = \frac{x}{1230}, \quad x = \frac{62 \times 1230}{100} = \frac{76260}{100} = 762.6$$

Deben comprarse 763 redecillas

Aunque el problema no lo dice, debe redondearse a la siguiente unidad. No se puede utilizar un "pedazo" de redecilla

ACTIVIDADES

www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → TANTO POR CIENTO
Ver el video: Calcular un porciento, Como calcular porcientos
Ejercicios: Por Ciento II

Dado un número, hallar que Tanto por ciento es otro número de él

$$\frac{\%}{100} = \frac{parte}{todo}$$

Elena se ahorró $30 en un vestido que compró con un 20% de rebaja. ¿Cuál era el precio original del vestido?

$$\frac{20}{100} = \frac{30}{y}, \quad y = \frac{30 \times 100}{20} = \frac{3000}{20} = 150$$

El vestido tenía un precio original de $150

ACTIVIDADES

www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → TANTO POR CIENTO
Ver el video: Tanto por ciento
Ejercicios: Por Ciento I y Por Ciento II

6. POTENCIAS Y RAÍCES

Potencia de números naturales

Una potencia es el resultado de multiplicar un número por sí mismo varias veces. Es decir, **una potencia es una forma abreviada de escribir un producto formado por varios factores iguales**
El número que multiplicamos se llama base **(a),** el número de veces que multiplicamos la base se llama exponente **(n)**.

Los elementos que constituyen una potencia son:

- La **base de la potencia (a)** es el número que multiplicamos por sí mismo, en este caso el **5**.
- El **exponente (n)** de una potencia indica el número de veces que multiplicamos la base, en el ejemplo es el **3**.

$$a^n = a \times a \times a \ \ldots n \ veces$$

$$5^3 = \underbrace{5 \times 5 \times 5}_{\text{El 5 se multiplicó por sí mismo 3 veces}} = 125$$

Operaciones entre potencias de números naturales y sus propiedades.

1. Todo número elevado al exponente 1 es igual a sí mismo

$$a^1 = a \qquad\qquad 5^1 = 5$$

El exponente 1 no se escribe, está implícito[15].

2. El **Producto de potencias** de igual base de como resultado otra potencia con la misma base, cuyo exponente es la **suma de los exponentes**.

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \qquad\qquad 5^2 \times 5^3 = 5^{2+3} = 5^5$$

3. La **División de potencias** con la misma base es otra potencia con la misma base, cuyo exponente es la **diferencia de los exponentes**.

$$a^n \div a^m = a^{n-m} \qquad\qquad 5^3 \div 5^2 = 5^{3-2} = 5$$

Recuerde que el exponente 1 está implícito

[15] Que está incluido en una cosa, sin que esta lo diga o lo especifique.

4. Todo número con exponente 0 es igual a 1

$$a^0 = 1 \qquad\qquad 5^0 = 1$$

$COMPROBACIÓN\ \ 2^3 \div 2^3 = \frac{2^3}{2^3} = \frac{8}{8} = \mathbf{1}\ \ pero\ 2^3 \div 2^3 = 2^{3-3} = \mathbf{2^0}\ \ entonces, por\ caracter\ transitivo, \qquad \mathbf{2^0 = 1}$

5. La **Potencia de una potencia** es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es el **producto de los exponentes**.

$$(a^n)^m = a^{n\times m} \qquad\qquad (5^2)^3 = 5^{2\times 3} = 5^6$$

6. Producto de potencias con el mismo exponente es otra potencia con el mismo exponente y cuya base es el producto de las bases.

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

Ambos exponentes son iguales (3) — Multiplico las bases — Dejo el mismo exponente

$2^3 \times 5^3 = 8 \times 125 = 1000$

$$2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3 = 1000$$

7. Cociente de potencias con el mismo exponente es otra potencia con el mismo exponente y cuya base es el cociente de las bases.

$$a^n \div b^n = (a \div b)^n$$

Ambos exponentes son iguales (3) — Divido las bases — Dejo el mismo exponente

$6^3 \div 2^3 = 216 \div 8 = 27$

$$6^3 \div 2^3 = (6 \div 2)^3 = 3^3 = 27$$

Propiedades de las potencias de números enteros

La potencia de exponente natural de un número entero es otro número entero, cuyo valor absoluto es el valor absoluto de la potencia y cuyo signo es el que se deduce de la aplicación de las siguientes reglas:

Las potencias de exponente par son siempre positivas.

$$(+)^{par} = + \qquad (-)^{par} = +$$

$$\underbrace{(3)^2 = 9}_{3\times 3 = 9} \qquad \underbrace{(-3)^2 = 9}_{-3\times -3 = 9}$$

Las potencias de exponente impar tienen el mismo signo de la base.

$$(+)^{impar} = + \qquad (-)^{impar} = -$$

$$\underbrace{(3)^3 = 27}_{3\times 3\times 3 = 27} \qquad \underbrace{(-3)^3 = -27}_{-3\times -3\times -3 = -27}$$

Potencias de exponente entero negativo

La potencia de exponente negativo es la inversa de la potencia con el mismo exponente, **pero positivo**:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

para $a \neq 0$
la división por 0 no está definida

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

Un número con exponente −1, es el inverso (recíproco) de dicho número.

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad\qquad 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

ACTIVIDADES

www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → POTENCIAS Y RAÍCES
Videos: La potenciación y sus propiedades; Potencia de exponentes; Propiedades de las potencias
Documentos: Ejercitación sencillos y complejos
Ejercicios: Propiedades de las potencias.

Notación Científica

La distancia de la Tierra a la Nebulosa de Andrómeda[16] es 2.537 millones años luz[17], es decir, está a

2,537,000,000 x 9 460 730 472 580.8 = 24 001 873 210 000 000 000 000 km

¿Es cómodo trabajar con **cifras tan grandes**? Indudablemente no. Para ello, los matemáticos crearon una forma de escribir (notación) dichos números que facilita las operaciones que se conoce como Notación Científica y consiste en expresar los ceros que acompañan a dichos números como potencias de 10.

Cuando estudiamos la multiplicación y la división de decimales, explicamos que la multiplicación / división por múltiplos de diez se efectúa **corriendo el punto decimal** a la derecha/izquierda según sea multiplicación/división. También sabemos que el exponente negativo se utiliza para representar el inverso del número. Si unimos ambos conceptos obtenemos la notación científica.

10 000 000 000 000 000 000 000 = 10^{22} (10 multiplicado por sí mismo 22 veces)

Podemos expresar entonces la distancia de la Tierra a la Nebulosa de Andrómeda de la siguiente manera

[16] La galaxia de Andrómeda es el objeto visible a simple vista más lejano de la Tierra
[17] Un año luz es la distancia que recorre la luz en el vacío en el lapso de un año, teniendo en cuenta que la luz se desplaza a 299 792 458 m/s en el vacío, un año luz equivale a 9 460 730 472 580.8 kilómetros

2.400187321x10^{22}

La regla es muy sencilla. Se corre el número decimal **hacia la izquierda** hasta dejar un solo entero, y se multiplican dichos números por una potencia de 10 que tenga como exponente la cantidad de lugares que se corrieron a la izquierda. En este caso se corrieron 22 lugares, por ello la potencia de 10 es 22.

Si multiplicáramos el número 2.400187321 por 10^{22} (10 000 000 000 000 000 000 000) obtendríamos el número original

2.400187321 x 10 000 000 000 000 000 000 000 = **24 001 873 210 000 000 000 000**

Un átomo de Plutonio pesa 0.0000000000000000000039 g, ¿Es cómodo trabajar con **cifras tan pequeñas**?, igual que con las cifras grandes, no.

Recordemos $\frac{1}{1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000} = \frac{1}{10^{21}} = 10^{-21}$= 0.000000000000000000001

Luego, si corro el punto decimal hacia la derecha hasta dejar un solo entero, puedo expresar el número de la siguiente manera

3.9 x 10^{-21}

La regla en este caso indica que se debe correr el número decimal **hacia la derecha** hasta dejar un solo entero, y se multiplican dichos números por una potencia de 10 que tenga como exponente **un número negativo** que equivale a la cantidad de lugares que se corrieron a la derecha. En este caso se corrieron 21 lugares, por ello la potencia de 10 es -21.

Si multiplicáramos el número 3.9 por $\mathbf{10^{-21}}$ (0.000000000000000000001) obtendríamos el número original

3.9 x 0.000000000000000000001 = 0.0000000000000000000039

ACTIVIDADES

www.estoy-aprendiendo.com
MATH→ MAT. BÁSICA → POTENCIAS Y RAÍCES
Videos: Notación Científica Intro; Expresar un número en Notación Científica.
Documentos: Elementos de Notación científica
Ejercicios: Notación Científica Interactivo.

Exponente fraccionario

Un exponente fraccionario indica que hay una raíz, que tiene como índice el denominador de la fracción y como radicando la base con exponente igual al numerador de la fracción.

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}} \qquad \boldsymbol{7^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{7^3}}$$

La radicación es la operación inversa a la potenciación**.**
Consiste en que, dados dos números llamados **radicando** e **índice**, hallar un tercero llamado **raíz**, de manera que, dicha raíz elevada al índice sea igual al radicando.

$$\sqrt[\text{índice}]{\boldsymbol{radicando}} = \boldsymbol{raíz}$$

$$(\boldsymbol{raíz})^{\boldsymbol{índice}} = \boldsymbol{radicando}$$

Raíces cuadradas

Cuando el índice de una raíz es igual a 2, se dice que es una "*raíz cuadrada*". En las raíces cuadradas no se escribe el número 2, está implícito. Las raíces pueden ser exactas o inexactas.

Raíz cuadrada exacta

La raíz cuadrada es la operación contraria de la potencia al cuadrado. Por ejemplo, la raíz cuadrada de 64 es 8 porque 8^2=64 y se escribe $\sqrt{64} = 8$. El símbolo $\sqrt{\ }$ se llama radical y el número que está dentro del radical es el radicando. Los números cuadrados tienen una raíz cuadrada exacta.
$\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, …, $\sqrt{81} = 9$

Raíz cuadrada entera (no exacta)

Si un número no es cuadrado perfecto (1, 4, 9, 16, 25, 36 , …) su raíz es entera (no es un número natural). Dicho de otra forma, la raíz cuadrada es entera, siempre cuando el radicando no es un cuadrado perfecto.
Ejemplo: Hallar la raíz cuadrada de 19.
No existe ningún número natural que multiplicad por sí mismo sea igual a 19. Tenemos que $4^2 = 16$ y $5^2 = 25$, luego la raíz cuadrada de 19 debe estar entre 4 y 5, entonces es un **número decimal.**

$$\mathbf{4 < \sqrt{19} < 5}$$

La calculadora nos indica que $\sqrt{19} = 4.3588$ …

Operaciones entre raíces y sus propiedades.

Las propiedades de los radicales nos permiten trabajar con ellos para intentar resolver operaciones con radicales que, a priori, parece difícil encontrar la solución. Estas propiedades de las raíces también nos sirven para simplificar los radicales al máximo, y reducirlos hasta que ofrezcan una forma más sencilla.

Producto de raíces

El producto de raíces de igual índice es igual a la raíz del producto de los radicandos.

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$$

$$\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3 \times 5} = \sqrt[3]{15}$$

Cociente de radicales

El cociente de raíces de igual índice es igual a la raíz del cociente de los radicandos.

$$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b}$$

$$\sqrt[4]{15} \div \sqrt[4]{3} = \sqrt[n]{15 \div 3} = \sqrt[4]{5}$$

Raíz de un radical

La raíz de un radical da como resultado una raíz que tiene como nuevo índice el producto de los índices manteniendo el mismo radicando

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \times n]{a}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[3 \times 5]{2} = \sqrt[15]{2}$$

Potencia de un radical

Cuando se eleva un radical a un exponente, el resultado es una raíz de igual índice con el radicando elevado al exponente.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^6 = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$$

ACTIVIDADES

www.estoy-aprendiendo.com

MATH→ MAT. BÁSICA → POTENCIAS Y RAÍCES

Videos: Como elevar a un exponente fraccionario, La radicación y sus propiedades, Leyes de los radicales

Ejercicios: Propiedades de las raíces

	Página	LIBROS SUGERIDOS PARA ESTUDIAR Y EJERCITAR			
		GED-Steck-Vaughn		HiSET-Guia Oficial del Examen	Common Ccore Basics - Matematicas
		Estudiante	Ejercicios		
5 RAZONES, PROPORCIONES Y RANTO POR CIENTO	60	10-11, 14-15	18-21,26-29	397-398,389-394	210-247
5.1 Magnitudes	60				
5.2 Razón	60				
5.3 Proporción	61				
5.4 Proporcionalidad	61				
5.5 Tanto por ciento	63				
POTENCIAS y RAÍCES	65	54-57	66-73	354	248-267
Potencia de números naturales	65				
Notación Científica	67				
Exponente fraccionario	69				
Raíces cuadradas	69				
Operaciones entre raíces y sus propiedades.	Operaciones entre raíces y sus propiedades.				
EXAMEN PARCIAL		**16-23**	**-**	**-**	**46, 70, 98, 130, 246, 264**

Bibliografía Consultada

- Common Core Basics, Matemáticas. McGraw-Hill Education. 2016
- Enseñanza de la matemática desde una perspectiva andragógica. Rubén Maduro et ... Artículo de investigación pedagógica. Universidad de La Sabana. Colombia.
- GED® Secrets Study Guide. Mometrix Test Preparation. 2018
- La Guía Oficial para el Examen HiSET. McGraw-Hill Education. 2016
- Matemáticas para adultos. Jose R. Flecha. Editorial El Roure, México.
- Preparación para el Examen de GED. McGraw-Hill Education. 2016
- Razonamiento Matemático. Libro de Ejercicios. Steck-Vaughn. Houghton Harcourt Publishing Company. 2014
- Razonamiento Matemático. Libro del Estudiante. Steck-Vaughn. Houghton Harcourt Publishing Company. 2014
- Teaching Adults: A Math Resource Book. New Readers Press. 2018.
- Lineamientos para las Matemáticas de GED Test 2014, HiSET y TASC.