Teoria do Consumidor (Parte 1)

Aula 01

Rogério Mazali

Microeconomia I

18/08/2020

- Nesse capítulo iremos desenvolver as noções básicas da Teoria do Consumidor.

- Nesse capítulo iremos desenvolver as noções básicas da Teoria do Consumidor.
- O modelo microeconômico básico faz suposições simplificadoras:

- Nesse capítulo iremos desenvolver as noções básicas da Teoria do Consumidor.
- O modelo microeconômico básico faz suposições simplificadoras:
  - Semelhança com a física: "vácuo perfeito" e "plano sem atrito".

- Nesse capítulo iremos desenvolver as noções básicas da Teoria do Consumidor.
- O modelo microeconômico básico faz suposições simplificadoras:
  - Semelhança com a física: “vácuo perfeito” e “plano sem atrito”.
  - Hipóteses irrealistas não invalidam modelo: teste empírico deve ser nas previsões, não hipóteses (Friedman).

- Nesse capítulo iremos desenvolver as noções básicas da Teoria do Consumidor.
- O modelo microeconômico básico faz suposições simplificadoras:
    - Semelhança com a física: "vácuo perfeito" e "plano sem atrito".
    - Hipóteses irrealistas não invalidam modelo: teste empírico deve ser nas previsões, não hipóteses (Friedman).
- Pedras fundamentais da qualquer modelo de escolha do consumidor:

- Nesse capítulo iremos desenvolver as noções básicas da Teoria do Consumidor.
- O modelo microeconômico básico faz suposições simplificadoras:
  - Semelhança com a física: "vácuo perfeito" e "plano sem atrito".
  - Hipóteses irrealistas não invalidam modelo: teste empírico deve ser nas previsões, não hipóteses (Friedman).
- Pedras fundamentais da qualquer modelo de escolha do consumidor:
  - Conjunto de consumo;

- Nesse capítulo iremos desenvolver as noções básicas da Teoria do Consumidor.
- O modelo microeconômico básico faz suposições simplificadoras:
    - Semelhança com a física: "vácuo perfeito" e "plano sem atrito".
    - Hipóteses irrealistas não invalidam modelo: teste empírico deve ser nas previsões, não hipóteses (Friedman).
- Pedras fundamentais da qualquer modelo de escolha do consumidor:
    - Conjunto de consumo;
    - Conjunto factível;

- Nesse capítulo iremos desenvolver as noções básicas da Teoria do Consumidor.
- O modelo microeconômico básico faz suposições simplificadoras:
  - Semelhança com a física: "vácuo perfeito" e "plano sem atrito".
  - Hipóteses irrealistas não invalidam modelo: teste empírico deve ser nas previsões, não hipóteses (Friedman).
- Pedras fundamentais da qualquer modelo de escolha do consumidor:
  - Conjunto de consumo;
  - Conjunto factível;
  - Relações de preferência;

- Nesse capítulo iremos desenvolver as noções básicas da Teoria do Consumidor.
- O modelo microeconômico básico faz suposições simplificadoras:
    - Semelhança com a física: "vácuo perfeito" e "plano sem atrito".
    - Hipóteses irrealistas não invalidam modelo: teste empírico deve ser nas previsões, não hipóteses (Friedman).
- Pedras fundamentais da qualquer modelo de escolha do consumidor:
    - Conjunto de consumo;
    - Conjunto factível;
    - Relações de preferência;
    - Hipóteses comportamentais.

- Nesse capítulo iremos desenvolver as noções básicas da Teoria do Consumidor.
- O modelo microeconômico básico faz suposições simplificadoras:
  - Semelhança com a física: "vácuo perfeito" e "plano sem atrito".
  - Hipóteses irrealistas não invalidam modelo: teste empírico deve ser nas previsões, não hipóteses (Friedman).
- Pedras fundamentais da qualquer modelo de escolha do consumidor:
  - Conjunto de consumo;
  - Conjunto factível;
  - Relações de preferência;
  - Hipóteses comportamentais.
- Estrutura do modelo é bastante geral e flexível.

- **Conjunto de Consumo (ou de Escolha):** seja X o conjunto que representa todas as alternativas que o consumidor pode conceber.

- **Conjunto de Consumo (ou de Escolha):** seja X o conjunto que representa todas as alternativas que o consumidor pode conceber.
- Número de bens: n.

- **Conjunto de Consumo (ou de Escolha):** seja X o conjunto que representa todas as alternativas que o consumidor pode conceber.
- Número de bens: n.
- Cada bem $i = \{1, \ldots, n\}$ pode ser medido em unidades (não-negativas) infinitamente divisíveis.

- **Conjunto de Consumo (ou de Escolha):** seja X o conjunto que representa todas as alternativas que o consumidor pode conceber.
- Número de bens: n.
- Cada bem $i = \{1, \ldots, n\}$ pode ser medido em unidades (não-negativas) infinitamente divisíveis.
- Suponha $X = \mathbb{R}^n_+$. Então o vetor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ representa a **Cesta de consumo (ou Plano de Consumo)** do consumidor, em que cada coordenada diz quanto o consumidor pretende consumir de cada bem i.

Propriedades de X Supomos que o conjunto X satisfaz:

1. $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n_+$;
2. X é fechado;
3. X é convexo;
4. $\mathbf{0} \in X$.

- **Conjunto Factível:** considere $B \subset X$ o conjunto das cestas de consumo que sejam não só concebíveis como também passíveis de serem obtidas pelo consumidor.

- **Conjunto Factível:** considere $B \subset X$ o conjunto das cestas de consumo que sejam não só concebíveis como também passíveis de serem obtidas pelo consumidor.
- Esse conjunto deve capturar a realidade a realidade financeira do consumidor.

- **Conjunto Factível:** considere $B \subset X$ o conjunto das cestas de consumo que sejam não só concebíveis como também passíveis de serem obtidas pelo consumidor.
- Esse conjunto deve capturar a realidade a realidade financeira do consumidor.
- Mais tarde iremos associá-lo à restrição orçamentária do consumidor.

- **Conjunto Factível:** considere $B \subset X$ o conjunto das cestas de consumo que sejam não só concebíveis como também passíveis de serem obtidas pelo consumidor.
- Esse conjunto deve capturar a realidade a realidade financeira do consumidor.
- Mais tarde iremos associá-lo à restrição orçamentária do consumidor.
- **Relação de Preferência:** relação algébrica que especifica:

- **Conjunto Factível:** considere $B \subset X$ o conjunto das cestas de consumo que sejam não só concebíveis como também passíveis de serem obtidas pelo consumidor.
- Esse conjunto deve capturar a realidade a realidade financeira do consumidor.
- Mais tarde iremos associá-lo à restrição orçamentária do consumidor.
- **Relação de Preferência:** relação algébrica que especifica:
    - limites (se existirem) na capacidade do consumidor escolher entre duas cestas;

- **Conjunto Factível:** considere $B \subset X$ o conjunto das cestas de consumo que sejam não só concebíveis como também passíveis de serem obtidas pelo consumidor.
- Esse conjunto deve capturar a realidade a realidade financeira do consumidor.
- Mais tarde iremos associá-lo à restrição orçamentária do consumidor.
- **Relação de Preferência:** relação algébrica que especifica:
    - limites (se existirem) na capacidade do consumidor escolher entre duas cestas;
    - informação a respeito dos gostos por diferentes cestas de consumo.

- Utilitaristas: "utilidade" (dor e prazer) era algo objetivo, mensurável, e comparável entre indivíduos;

- Utilitaristas: "utilidade" (dor e prazer) era algo objetivo, mensurável, e comparável entre indivíduos;
- O chamado "Princípio da Utilidade Marginal Decrescente" (PUMD) era aceito como uma lei psicológica.

- Utilitaristas: "utilidade" (dor e prazer) era algo objetivo, mensurável, e comparável entre indivíduos;
- O chamado "Princípio da Utilidade Marginal Decrescente" (PUMD) era aceito como uma lei psicológica.
- Progressivamente, demonstrou-se que nem utilidade mensurável nem PUMD eram necessários.

- As preferências do consumidor são caracterizadas de forma axiomática.

- As preferências do consumidor são caracterizadas de forma axiomática.
- **Axiomas** são as suposições básicas de um modelo matemático.

- As preferências do consumidor são caracterizadas de forma axiomática.
- **Axiomas** são as suposições básicas de um modelo matemático.
- Cada axioma tem um significado preciso e supõe algo sobre o comportamento do consumidor.

- As preferências do consumidor são caracterizadas de forma axiomática.
- **Axiomas** são as suposições básicas de um modelo matemático.
- Cada axioma tem um significado preciso e supõe algo sobre o comportamento do consumidor.
- Axiomas sobre preferências são portanto *hipóteses* sobre o comportamento dos consumidores.

- As preferências do consumidor são caracterizadas de forma axiomática.
- **Axiomas** são as suposições básicas de um modelo matemático.
- Cada axioma tem um significado preciso e supõe algo sobre o comportamento do consumidor.
- Axiomas sobre preferências são portanto *hipóteses* sobre o comportamento dos consumidores.
- Essas hipóteses podem ser testadas.

- Formalmente, representamos as preferências do consumidor por uma relação binária $\succeq$ definida em X.

Definition

A *relação binária* (comparação de uma cesta com outra) representada por $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ significa dizer que $\mathbf{x}$ é (fracamente) preferível a $\mathbf{y}$ (também pode ser escrita como $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \succeq$).

Um *sistema de preferências* $\succeq$ é uma relação binária definida no conjunto de consumo X, que satisfaz certas propriedades.

- Vamos supor que a relação binária $\succeq$ satisfaz os seguintes axiomas:

Definition

A relação binária $\succeq$ definida no conjunto X é uma **relação de preferência** se satisfaz os axiomas acima.

- Vamos supor que a relação binária $\succeq$ satisfaz os seguintes axiomas:
  - **Axioma 1: Completeza.** Para quaisquer cestas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em X, ou $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ ou $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$ (ou ambos).

Definition

A relação binária $\succeq$ definida no conjunto X é uma **relação de preferência** se satisfaz os axiomas acima.

- Vamos supor que a relação binária $\succeq$ satisfaz os seguintes axiomas:
  - **Axioma 1: Completeza.** Para quaisquer cestas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em X, ou $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ ou $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$ (ou ambos).
  - **Axioma 1': Reflexividade.** Para qualquer cesta $\mathbf{x}$ em X, temos que $\mathbf{x} \succeq \mathbf{x}$.

Definition

A relação binária $\succeq$ definida no conjunto X é uma **relação de preferência** se satisfaz os axiomas acima.

- Vamos supor que a relação binária $\succeq$ satisfaz os seguintes axiomas:
  - **Axioma 1: Completeza.** Para quaisquer cestas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em X, ou $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ ou $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$ (ou ambos).
  - **Axioma 1': Reflexividade.** Para qualquer cesta $\mathbf{x}$ em X, temos que $\mathbf{x} \succeq \mathbf{x}$.
  - **Axioma 2: Transitividade.** Para quaisquer cestas $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ em X, se $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} \succeq \mathbf{z}$ então $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}$.

Definition

A relação binária $\succeq$ definida no conjunto X é uma **relação de preferência** se satisfaz os axiomas acima.

- Axioma 1 formaliza a ideia de comparabilidade entre duas cestas de consumo.
- Axioma 2 requer que escolhas do consumidor sejam consistentes (que não apresentem inconsistência circular).
- O melhor argumento em defesa da transitividade das preferências é de ordem normativa. Preferências não-transitivas resultam na possibilidade de um "dutch book": uma sequência de trocas que levam o consumidor a perder todo o seu dinheiro.

Example

Suponha que um consumidor tenha uma cesta $\mathbf{x}$ de bens e que ordene as cestas $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, e $\mathbf{z}$ da seguinte maneira não-transitiva: $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$ e $\mathbf{z} \succ \mathbf{x}$, ou seja, $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \succ \mathbf{z} \succ \mathbf{x}$. Por meio de trocas circulares, o consumidor terminaria com a mesma cesta inicial e sem dinheiro algum. Esse resultado é consequência direta de as preferências não serem transitivas.

- Podemos também definir as seguintes relações:

Definition (Relação de Preferência Estrita)

A relação binária $\succ$ no conjunto de consumo X é definida como:

$$\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2 \Leftrightarrow \mathbf{x}^1 \succeq \mathbf{x}^2 \text{ and } \mathbf{x}^2 \not\succeq \mathbf{x}^1.$$

Definition (Relação de Indiferença)

A relação binária $\sim$ no conjunto de consumo X é definida como:

$$\mathbf{x}^1 \sim \mathbf{x}^2 \Leftrightarrow \mathbf{x}^1 \succeq \mathbf{x}^2 \text{ and } \mathbf{x}^2 \succeq \mathbf{x}^1.$$

- Seja $\mathbf{x}$ uma cesta qualquer no conjunto de consumo X. Podemos definir os seguintes conjuntos:

- Seja **x** uma cesta qualquer no conjunto de consumo X. Podemos definir os seguintes conjuntos:

1. $\succsim(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{y} \succsim \mathbf{x}\}$ (pelo menos tão bom quanto);

- Seja **x** uma cesta qualquer no conjunto de consumo X. Podemos definir os seguintes conjuntos:

1. $\succeq(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{y} \succeq \mathbf{x}\}$ (pelo menos tão bom quanto);
2. $\preceq(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}\}$ (pelo menos tão ruim quanto);

- Seja $\mathbf{x}$ uma cesta qualquer no conjunto de consumo X. Podemos definir os seguintes conjuntos:

1. $\succeq(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{y} \succeq \mathbf{x}\}$ (pelo menos tão bom quanto);
2. $\preceq(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}\}$ (pelo menos tão ruim quanto);
3. $\prec(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{x} \succ \mathbf{y}\}$ (pior que);

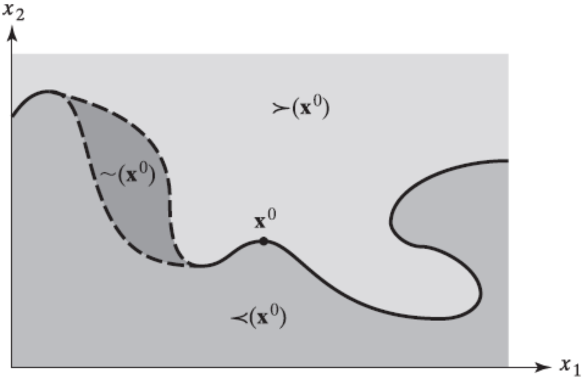
- Seja $\mathbf{x}$ uma cesta qualquer no conjunto de consumo X. Podemos definir os seguintes conjuntos:

1. $\succeq(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{y} \succeq \mathbf{x}\}$ (pelo menos tão bom quanto);
2. $\preceq(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}\}$ (pelo menos tão ruim quanto);
3. $\prec(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{x} \succ \mathbf{y}\}$ (pior que);
4. $\succ(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{y} \succ \mathbf{x}\}$ (preferível a);

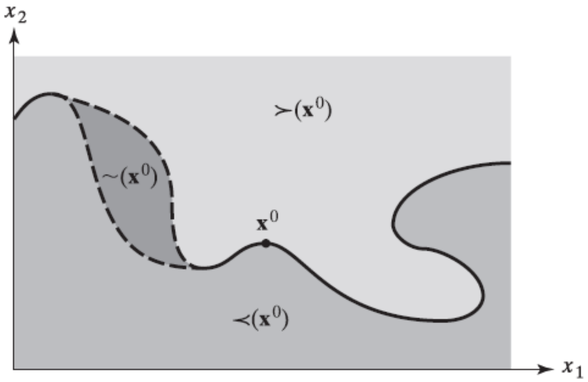
- Seja $\mathbf{x}$ uma cesta qualquer no conjunto de consumo X. Podemos definir os seguintes conjuntos:

1. $\succeq(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{y} \succeq \mathbf{x}\}$ (pelo menos tão bom quanto);
2. $\preceq(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}\}$ (pelo menos tão ruim quanto);
3. $\prec(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{x} \succ \mathbf{y}\}$ (pior que);
4. $\succ(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{y} \succ \mathbf{x}\}$ (preferível a);
5. $\sim(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{y} \sim \mathbf{x}\}$ (indiferença).

- Preferências satisfazendo os Axiomas 1 e 2 ainda podem ser bem "estranhas".



- Preferências satisfazendo os Axiomas 1 e 2 ainda podem ser bem "estranhas".
- O gráfico abaixo mostra preferências que satisfazem os Axiomas 1 e 2:



- Por isso, podemos impor mais estrutura nas relações de preferências, com mais axiomas:

Axioma 3: Continuidade. Os conjuntos $\succeq(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{y} \succeq \mathbf{x}\}$ (cestas pelo menos tão boas quanto $\mathbf{x}$) e $\preceq(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}\}$ (cestas pelo menos tão ruins quanto $\mathbf{x}$) são fechados para todo $\mathbf{x} \in X$.

- Por isso, podemos impor mais estrutura nas relações de preferências, com mais axiomas:

Axioma 3: Continuidade. Os conjuntos $\succeq(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{y} \succeq \mathbf{x}\}$ (cestas pelo menos tão boas quanto $\mathbf{x}$) e $\preceq(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}\}$ (cestas pelo menos tão ruins quanto $\mathbf{x}$) são fechados para todo $\mathbf{x} \in X$.

- O Axioma 3 elimina a possibilidade de termos conjuntos de indiferença não-fechados, como os da figura do slide anterior.

- Por isso, podemos impor mais estrutura nas relações de preferências, com mais axiomas:

Axioma 3: Continuidade. Os conjuntos $\succeq(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{y} \succeq \mathbf{x}\}$ (cestas pelo menos tão boas quanto $\mathbf{x}$) e $\preceq(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}\}$ (cestas pelo menos tão ruins quanto $\mathbf{x}$) são fechados para todo $\mathbf{x} \in X$.

- O Axioma 3 elimina a possibilidade de termos conjuntos de indiferença não-fechados, como os da figura do slide anterior.
- Ainda assim, há algo mais de estranho com as preferências da figura: saciedade local $=>$ mais estrutura, com mais um axioma:

- Por isso, podemos impor mais estrutura nas relações de preferências, com mais axiomas:

Axioma 3: Continuidade. Os conjuntos $\succeq(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{y} \succeq \mathbf{x}\}$ (cestas pelo menos tão boas quanto $\mathbf{x}$) e $\preceq(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}\}$ (cestas pelo menos tão ruins quanto $\mathbf{x}$) são fechados para todo $\mathbf{x} \in X$.

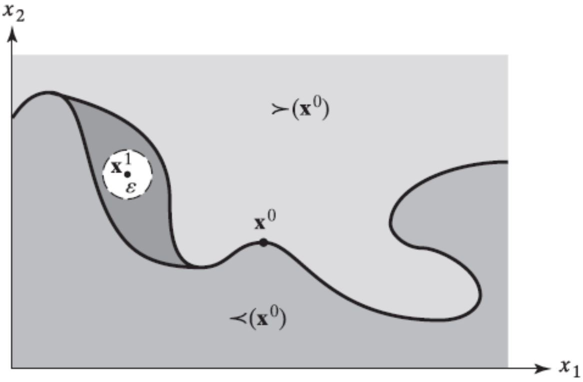
- O Axioma 3 elimina a possibilidade de termos conjuntos de indiferença não-fechados, como os da figura do slide anterior.
- Ainda assim, há algo mais de estranho com as preferências da figura: saciedade local => mais estrutura, com mais um axioma:
  - **Axioma 4': Não-Saciedade Local.** Para toda cesta $\mathbf{x} \in X$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe uma cesta $\mathbf{y} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap X$ tal que $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$.

- Por isso, podemos impor mais estrutura nas relações de preferências, com mais axiomas:

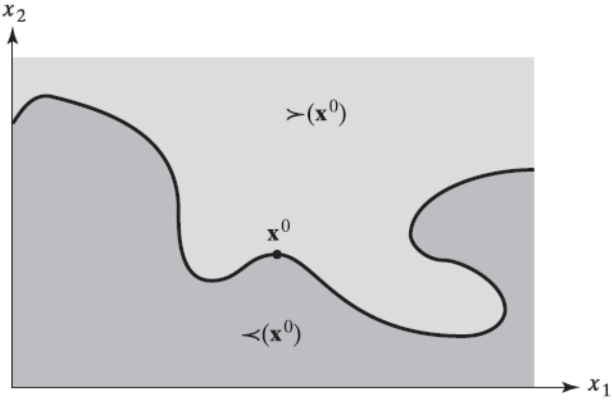
Axioma 3: Continuidade. Os conjuntos $\succeq(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{y} \succeq \mathbf{x}\}$ (cestas pelo menos tão boas quanto $\mathbf{x}$) e $\preceq(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{y} \in X; \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}\}$ (cestas pelo menos tão ruins quanto $\mathbf{x}$) são fechados para todo $\mathbf{x} \in X$.

- O Axioma 3 elimina a possibilidade de termos conjuntos de indiferença não-fechados, como os da figura do slide anterior.
- Ainda assim, há algo mais de estranho com as preferências da figura: saciedade local $=>$ mais estrutura, com mais um axioma:
  - **Axioma 4': Não-Saciedade Local.** Para toda cesta $\mathbf{x} \in X$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe uma cesta $\mathbf{y} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap X$ tal que $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$.
  - **Axioma 4: Monotonicidade Estrita.** Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, se $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$, então $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$, enquanto se $\mathbf{x} \gg \mathbf{y}$, então $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$.

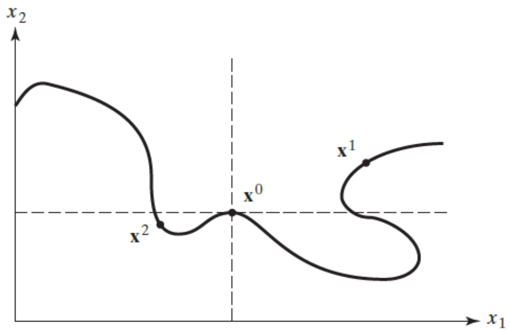
- Axioma 4' (ou, alternativamente, Axioma 4) eliminam a possibilidade de conjuntos de indiferença "grossos" => curva de indiferença.



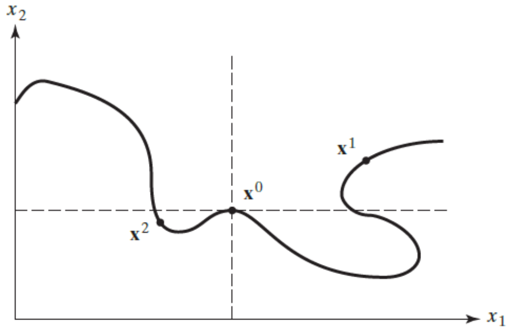
- O gráfico abaixo mostra uma relação de preferências que satisfaz os axiomas 1, 2, 3 e 4'.



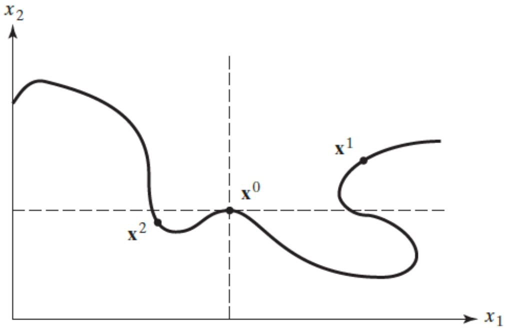
- Ainda há algo de estranho nessas preferências:



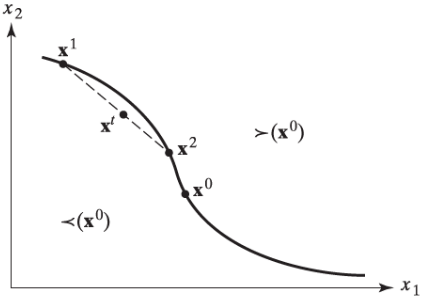
- Ainda há algo de estranho nessas preferências:
  - Aumentar o consumo de ambos os bens ao se ir da cesta $\mathbf{x}^0$ para a $\mathbf{x}^1$ não traz mais satisfação (ou dissatisfação) ao consumidor.



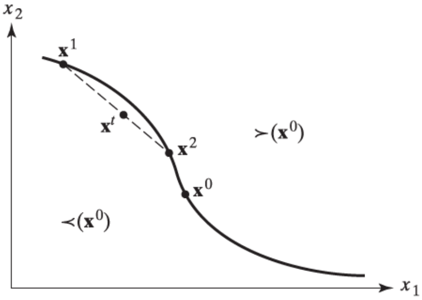
- Ainda há algo de estranho nessas preferências:
  - Aumentar o consumo de ambos os bens ao se ir da cesta $\mathbf{x}^0$ para a $\mathbf{x}^1$ não traz mais satisfação (ou dissatisfação) ao consumidor.
  - Reduzir o consumo de ambos os bens ao se ir da cesta $\mathbf{x}^0$ para a $\mathbf{x}^2$ não traz menos satisfação (ou dissatisfação) ao consumidor.



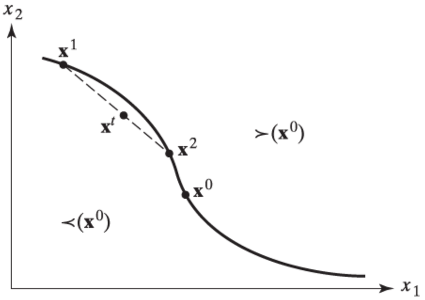
- Por isso às vezes impomos o Axioma 4 (monotonicidade estrita) ao invés do Axioma 4' (não-saciedade local).



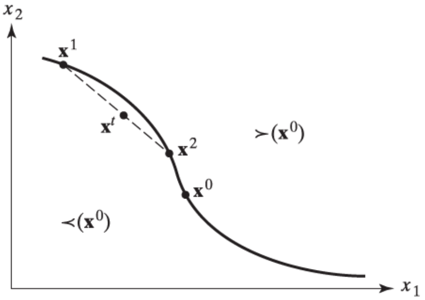
- Por isso às vezes impomos o Axioma 4 (monotonicidade estrita) ao invés do Axioma 4' (não-saciedade local).
- O gráfico abaixo mostra preferências que satisfazem os Axiomas 1, 2, 3, e 4.



- Ainda há algo estranho com essas preferências. Consumidores normalmente gostam de variedade.



- Ainda há algo estranho com essas preferências. Consumidores normalmente gostam de variedade.
- No entanto, esse consumidor prefere estritamente as cestas $\mathbf{x}^1$ e $\mathbf{x}^2$ a uma combinação convexa $\mathbf{x}^t = t\mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{x}^2$, $t \in (0,1)$ entre elas, isto é, um pouco de cada cesta.



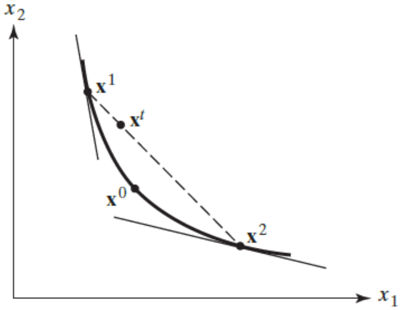
- Por isso, podemos impor mais estrutura nas relações de preferências, com mais axiomas:

- Por isso, podemos impor mais estrutura nas relações de preferências, com mais axiomas:
  - **Axioma 5': Convexidade.** Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são duas cestas de bens tais que $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$, então $t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \succeq \mathbf{y}$, para todo $t \in [0,1]$.

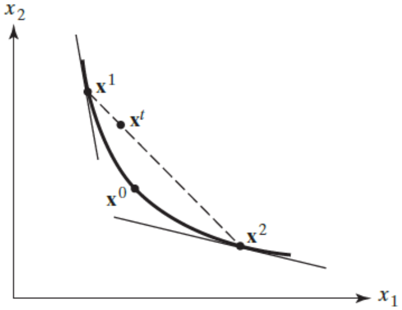
- Por isso, podemos impor mais estrutura nas relações de preferências, com mais axiomas:
  - **Axioma 5': Convexidade.** Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são duas cestas de bens tais que $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$, então $t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \succeq \mathbf{y}$, para todo $t \in [0, 1]$.
  - **Axioma 5: Convexidade Estrita.** Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são duas cestas de bens distintas tais que $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$, então $t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \succ \mathbf{y}$, para todo $t \in (0, 1)$.

- Por isso, podemos impor mais estrutura nas relações de preferências, com mais axiomas:
  - **Axioma 5': Convexidade.** Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são duas cestas de bens tais que $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$, então $t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \succeq \mathbf{y}$, para todo $t \in [0, 1]$.
  - **Axioma 5: Convexidade Estrita.** Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são duas cestas de bens distintas tais que $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$, então $t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \succ \mathbf{y}$, para todo $t \in (0, 1)$.
- Esses axiomas eliminam a situação da figura anterior.

- O gráfico abaixo mostra preferências que satisfazem os Axiomas 1, 2, 3, 4 e 5 ou 5'.



- O gráfico abaixo mostra preferências que satisfazem os Axiomas 1, 2, 3, 4 e 5 ou 5'.



- Os axiomas de convexidade nas preferências formalizam a preferência por variedade.

- Outra forma de descrever as implicações da convexidade para as escolhas do consumidor é através da **taxa marginal de substituição (TMS).**

- Outra forma de descrever as implicações da convexidade para as escolhas do consumidor é através da **taxa marginal de substituição (TMS).**
- A TMS é a curvatura da curva de indiferença.

- Outra forma de descrever as implicações da convexidade para as escolhas do consumidor é através da **taxa marginal de substituição (TMS).**
- A TMS é a curvatura da curva de indiferença.
- Convexidade implica que a TMS deve ser decrescente => **Princípio da Taxa Marginal de Substituição Decrescente**.

- É bastante conveniente explicitarmos a informação presente nas relações de preferência do consumidor como uma função de utilidade.

Definition (Função de Utilidade)

Uma *função de utilidade* assinala para cada cesta $\mathbf{x} \in X$ um valor $u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$.

- É bastante conveniente explicitarmos a informação presente nas relações de preferência do consumidor como uma função de utilidade.
- Assim podemos aplicar técnicas de otimização para obter a cesta a ser escolhida pelo consumidor.

Definition (Função de Utilidade)

Uma *função de utilidade* assinala para cada cesta $\mathbf{x} \in X$ um valor $u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$.

- É bastante conveniente explicitarmos a informação presente nas relações de preferência do consumidor como uma função de utilidade.
- Assim podemos aplicar técnicas de otimização para obter a cesta a ser escolhida pelo consumidor.
- Por isso é importante sabermos em que condições podemos representar com uma função de utilidade as preferências que satisfazem os axiomas expostos anteriormente.

Definition (Função de Utilidade)

Uma *função de utilidade* assinala para cada cesta $\mathbf{x} \in X$ um valor $u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$.

Definition (Representação)

Dizemos que uma função de utilidade $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *representa* uma a relação de preferência $\succeq$ se, para todo $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}^n_+$, $u(\mathbf{x}^0) \geq u(\mathbf{x}^1) \Leftrightarrow \mathbf{x}^0 \succeq \mathbf{x}^1$.

- Função utilidade representa uma relação de preferências se ela atribuir a cestas preferidas valor maior do que às cestas preteridas.

Definition (Representação)

Dizemos que uma função de utilidade $u : \mathbb{R}^n_+ \rightarrow \mathbb{R}$ *representa* uma a relação de preferência $\succeq$ se, para todo $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}^n_+$, $u(\mathbf{x}^0) \geq u(\mathbf{x}^1) \Leftrightarrow \mathbf{x}^0 \succeq \mathbf{x}^1$.

- Função utilidade representa uma relação de preferências se ela atribuir a cestas preferidas valor maior do que às cestas preteridas.
- Sempre podemos representar uma relação de preferências por uma função de utilidade? Nem sempre, mas se os axiomas 1, 2, 3 e 4 forem satisfeitos, nós podemos.

Theorem (Teorema da Representação de Debreu (1954))

Se X é um espaço contável de segunda ordem e o sistema de preferências satisfaz os axiomas de completeza, transitividade e continuidade, então existe uma função de utilidade u contínua que representa esse sistema. Mais ainda, qualquer transformação monotônica positiva dessa função de utilidade também representa o mesmo sistema de preferências.

- A demonstração do teorema é mais intuitiva se supusermos monotonicidade, simplificando-a.

Theorem (Teorema da Representação - Simples)

Se o sistema de preferências satisfaz os axiomas de completeza, transitividade, continuidade e monotonicidade estrita, então existe uma função de utilidade contínua u que representa esse sistema.

Demonstração.

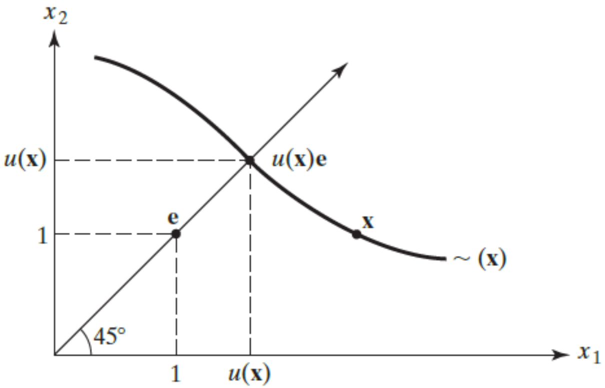
Considere um mapeamento $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ definido tal que

$$u(\mathbf{x})\mathbf{e} \sim \mathbf{x} \tag{1}$$

onde $\mathbf{e} = (1, 1, \ldots, 1)$. Duas perguntas: (i) este número $u(\mathbf{x})$ tal que $u(\mathbf{x})\mathbf{e} \sim \mathbf{x}$ sempre existe? (ii) ele é unicamente determinado? Para responder (i), fixe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, e considere $A \equiv [t > 0 | t\mathbf{e} \succeq \mathbf{x}]$ e $B \equiv [t > 0 | t\mathbf{e} \preceq \mathbf{x}]$. Se $t^* \in A \cap B$, então $t^*\mathbf{e} \sim \mathbf{x}$, o que implica que fixando $u(\mathbf{x}) = t^*$ satisfaz (1). Assim, se provarmos que $A \cap B \neq \varnothing$, provamos (i). Temos que continuidade implica que A e B são ambos fechados em $\mathbb{R}^n_+$ (Ex1.11). Por monotonicidade estrita, $t \in A \Rightarrow t' \in A, \forall t' \geq t$, e $t \in B \Rightarrow t' \in B, \forall t' \leq t$. Portanto A e B são intervalos da forma $A = [\underline{t}, +\infty)$ e $B = [0, \overline{t}]$. Por completude, ou temos $t\mathbf{e} \succeq \mathbf{x}$ ou $t\mathbf{e} \preceq \mathbf{x}$, isto é, $t \in A \cup B = [\underline{t}, +\infty) \cup [0, \overline{t}] = \mathbb{R}^n_+$. Portanto, temos $\underline{t} \leq \overline{t}$ e, assim, $A \cap B \neq \varnothing$. (q.e.d.) □

Preferências e Utilidade

A Função de Utilidade



Demonstração (continuação).

Para provar (ii), que há um único $t > 0$ satisfazendo $t\mathbf{e} \sim \mathbf{x}$. Isso segue trivialmente, pois, por transitividade, $t_1\mathbf{e} \sim \mathbf{x}$ e $t_2\mathbf{e} \sim \mathbf{x}$ implicam $t_1 = t_2$. Resta mostrar que $u(\mathbf{x})$ representa $\succeq$. Considere $\mathbf{x}^1$ e $\mathbf{x}^2$ tais que $u(\mathbf{x}^1)\mathbf{e} \sim \mathbf{x}^1$ e $u(\mathbf{x}^2)\mathbf{e} \sim \mathbf{x}^2$. Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1 &\succeq \mathbf{x}^2 && (2)\\ &\Leftrightarrow u(\mathbf{x}^1)\mathbf{e} \sim \mathbf{x}^1 \succeq \mathbf{x}^2 \sim u(\mathbf{x}^2)\mathbf{e} && (3)\\ &\Leftrightarrow u(\mathbf{x}^1)\mathbf{e} \succeq u(\mathbf{x}^2)\mathbf{e} && (4)\\ &\Leftrightarrow u(\mathbf{x}^1) \geq u(\mathbf{x}^2) && (5) \end{aligned}$$

(q.e.d.) □

Demonstração (continuação).

Resta mostrar que u é contínua. É suficiente mostrarmos que a contra-imagem sob u de toda bola aberta (a, b) em $\mathbb{R}$, $a < b$, é aberta em $\mathbb{R}^n_+$.

$$\begin{aligned} u^{-1}(a, b) &= [\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ | a < u(\mathbf{x}) < b] \\ &= [\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ | a\mathbf{e} \prec u(\mathbf{x})\mathbf{e} \prec b\mathbf{e}] \\ &= [\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ | a\mathbf{e} \prec \mathbf{x} \prec b\mathbf{e}] \\ &= [\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ | a\mathbf{e} \prec \mathbf{x}] \cap [\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ | \mathbf{x} \prec b\mathbf{e}] \\ &= \succ (a\mathbf{e}) \cap \prec (b\mathbf{e}) \end{aligned}$$

Pela continuidade de $\succeq$, os conjuntos $\succeq (a\mathbf{e})$ e $\preceq (b\mathbf{e})$ são fechados. Seus complementos, respectivamente $\prec (b\mathbf{e})$ e $\succ (a\mathbf{e})$, são, portanto, abertos. A interceção entre eles é, portanto, um conjunto aberto (q.e.d.). □

- Vale notar que, se multiplicarmos a função $u(\cdot)$ que representa $\succeq$ por um escalar $\alpha > 0$, a função $v(\cdot) = \alpha u(\cdot)$ também representará $\succeq$.

Theorem (Invariância da Função Utilidade a Transformações Monotônicas Positivas)

Seja o sistema de preferências $\succeq$ definido em $\mathbb{R}^n_+$ e seja u uma função de utilidade que representa esse sistema. Então v também representa $\succeq$ se, e somente se, $v(\mathbf{x}) = f(u(\mathbf{x}))$ para todo $\mathbf{x} \in X$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é estritamente crescente em $u(X)$.

- Vale notar que, se multiplicarmos a função $u(\cdot)$ que representa $\succeq$ por um escalar $\alpha > 0$, a função $v(\cdot) = \alpha u(\cdot)$ também representará $\succeq$.
- Isso ocorre porque o que importa é que a ordem entre as cestas de consumo seja preservada.

Theorem (Invariância da Função Utilidade a Transformações Monotônicas Positivas)

Seja o sistema de preferências $\succeq$ definido em $\mathbb{R}^n_+$ e seja u uma função de utilidade que representa esse sistema. Então v também representa $\succeq$ se, e somente se, $v(\mathbf{x}) = f(u(\mathbf{x}))$ para todo $\mathbf{x} \in X$, onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é estritamente crescente em $u(X)$.

- Vale notar que, se multiplicarmos a função $u(\cdot)$ que representa $\succeq$ por um escalar $\alpha > 0$, a função $v(\cdot) = \alpha u(\cdot)$ também representará $\succeq$.
- Isso ocorre porque o que importa é que a ordem entre as cestas de consumo seja preservada.
- Na verdade, qualquer transformação monotônica de $u(\cdot)$ representará $\succeq$ porque preserva a ordem entre as cestas representada por $u(\cdot)$. Portanto:

Theorem (Invariância da Função Utilidade a Transformações Monotônicas Positivas)

Seja o sistema de preferências $\succeq$ definido em $\mathbb{R}^n_+$ e seja u uma função de utilidade que representa esse sistema. Então v também representa $\succeq$ se, e somente se, $v(\mathbf{x}) = f(u(\mathbf{x}))$ para todo $\mathbf{x} \in X$, onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é estritamente crescente em $u(X)$.

- Podemos traçar um paralelo entre as propriedades da função utilidade e das preferências do consumidor.

Theorem (Propriedades de Preferências e Funções Utilidade)

Seja $\succsim$ representado por $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$. Então: (i) $u(\mathbf{x})$ é estritamente crescente se, e somente se, $\succsim$ é estritamente monótona; (ii) $u(\mathbf{x})$ é quasecôncava se, e somente se, $\succsim$ é convexa; (iii) $u(\mathbf{x})$ é estritamente quasecôncava se, e somente se, $\succsim$ é estritamente convexa.

- Podemos traçar um paralelo entre as propriedades da função utilidade e das preferências do consumidor.
- Cada propriedade de $\succsim$ corresponde a uma propriedade de $u(\cdot)$.

Theorem (Propriedades de Preferências e Funções Utilidade)

Seja $\succsim$ representado por $u : \mathbb{R}^n_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Então: (i) $u(\mathbf{x})$ é estritamente crescente se, e somente se, $\succsim$ é estritamente monótona; (ii) $u(\mathbf{x})$ é quasecôncava se, e somente se, $\succsim$ é convexa; (iii) $u(\mathbf{x})$ é estritamente quasecôncava se, e somente se, $\succsim$ é estritamente convexa.

- A *Taxa Marginal de Substituição (TMS)* mede o valor absoluto da inclinação da curva de indiferença.

- A *Taxa Marginal de Substituição (TMS)* mede o valor absoluto da inclinação da curva de indiferença.
- A TMS entre dois bens mede a taxa pela qual o consumidor está disposto a trocar um bem por outro: a TMS do bem 1 pelo bem 2 é o valor que o consumidor atribui ao bem 1 em termos do bem 2.

- A *Taxa Marginal de Substituição (TMS)* mede o valor absoluto da inclinação da curva de indiferença.
- A TMS entre dois bens mede a taxa pela qual o consumidor está disposto a trocar um bem por outro: a TMS do bem 1 pelo bem 2 é o valor que o consumidor atribui ao bem 1 em termos do bem 2.
- A inclinação da curva de indiferença é um número negativo: se o consumidor abre mão de um pouco de um bem, ele precisa receber um pouco do outro bem para manter-se na mesma curva de indiferença (consequência do axioma de monotonicidade estrita).

- Vamos usar a utilidade marginal do bem x_i, que mede o acréscimo na utilidade devido a um aumento no consumo do bem i:

$$UMg_{x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i},$$

para encontrar a TMs entre dois bens. Note que a utilidade marginal não tem conteúdo econômico, já que a função de utilidade não é única.

- Vamos usar a utilidade marginal do bem x_i, que mede o acréscimo na utilidade devido a um aumento no consumo do bem i:

$$UMg_{x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i},$$

para encontrar a TMs entre dois bens. Note que a utilidade marginal não tem conteúdo econômico, já que a função de utilidade não é única.

- Podemos derivar a TMS usando o teorema da função implícita ou a regra de diferenciação total. A fórmula da TMS entre dois bens (1 e 2) é:

$$TMS_{1,2}(x_1, x_2) = \left| \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{du=0} = \frac{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}} = \frac{UMg_{x_1}(x_1, x_2)}{UMg_{x_2}(x_1, x_2)}$$